<36608270050011

<36608270050011

Bayer. Staatsbibliothek

Math. P. 75 m

Mathes. Calcul. probabil. p. 368.

R

DIE RECHNUNG
DES
WAHRSCHEINLICHEN

AUS DEM FRANZÖSISCHEN

DES

HERRN C. F. DE BICQUILLEY

ÜBERSETZT

UND

MIT ANMERKUNGEN VERSEHEN

VON

M. CHRIST. FRIEDR. RÜDIGER

Nebst einer Kupfertafel.

LEIPZIG

BEI ENGELHARD BENJAMIN SCHWICKERT

1788.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

VORREDE.

Analysis und Geometrie ſind die anerkannt einzigen Wegweiſer, welche uns ſicher zur Erkenntniſs der Wahrheit führen. Die Anwendungen derſelben in unſern Zeiten auf verſchiedene Gegenſtände der menſchlichen Kenntniſſe haben das Reich des Wahnes und der bloſsen Meinungen ſehr geſchwächt. Strenge und Genauigkeit iſt an die Stelle wüſter Spekulationen eingetreten, und einige gewiſſe Wahrheiten an die Stelle einer groſsen Menge blinder Vorurtheile und ſinnreicher Irrthümer. Auch kann man mit Grunde hoffen, daſs der menſchliche Geiſt in dieſer ſeiner Laufbahn nicht ſtehen bleiben werde, und daſs die Rechnungs-Methode ſich dereinſt auch über ſolche Gegenſtände ausbreiten werde, worauf ſie uns noch jetzt ſehr wenig anwendbar vorkommt, und wobei unſere Begriffe in Richtigkeit zu bringen, ſie auf feſte Gründe zu ſtellen, für uns von äusſerſter Wichtigkeit iſt. Die bisher miſslun-

genen Verſuche beweiſsen weiter nichts als die Schwierigkeit der Sache; ſie können ſogar dienen, glüklichern Bemühungen den Weg zu bahnen, indem ſie die Klippen zeigen, woran andere vorher geſcheidert ſind.

Das menſchliche Erkenntniſs-Vermögen hat freilich ſeine natürlichen ihm angewieſenen Schranken, und es giebt Gegenſtände, ſelbſt ſolche, die uns überaus wichtig ſind, wobei wir auf immer zu zweifeln gezwungen ſein werden, und wobei wir uns blos an Wahrſcheinlichkeit halten müſſen. Bei der Wahrſcheinlichkeit aber läſst ſich der Begrif von minder und mehr, das iſt, der Begrif von Gröſse anbringen; ſie hat nämlich alle Eigenſchaften, welche der Gröſse zukommen, Verhältniſſe der Gleichheit und Ungleichheit; es giebt auch bei ihr Grenzen des Gröſsten und Kleinſten, welche die abſolute Gewiſsheit auf der einen, und die anerkannte Unmöglichkeit auf der andern Seite ſind. Dies unterwirft ſie der Geometrie und der Berechnung.

Ueberzeugt, daſs die bereits von berühmten Mathematikern zu bearbeiten angefangene Theorie der Wahrſcheinlichkeiten voll-

ständiger ausgeführt, und als ein Theil des Elementar-Unterrichts den mathematischen Anfangsgründen beigefüget werden könne, glaubten wir, daſs eine Schrift, welche diese wissenswerthe Materie mit neuen Wahrheiten bereichern, und vielen Lesern recht verständlich machen könnte, nicht unwürdig zu sein scheinen würde, dem Publikum vorgelegt zu werden. *)

Wir sind aber weit entfernt, zu behaupten, als ob die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten auf einen solchen Grad von Vollkom-

) Der Inhalt derselben ist in dieser deutschen Uebersetzung zuförderst in so fern abgeändert worden, daſs zwölf Kapitel aus sieben des Originals gemacht worden sind, um die einzelnen Materien mehr abzusondern, und einigermassen umständlicher abhandeln zu können. Die hinzugekommenen Anmerkungen und Zusätze sind theils im Texte selbst, theils in einigen unter ihm befindlichen Noten eingeschaltet, und um dieselben von der Arbeit des französischen Verfassers zu unterscheiden, mit Sternchen () bezeichnet. Wir schmeicheln uns, daſs man diese geringen Veränderungen darum nicht miſsbilligen werde, weil deutlich zu sein, und Zweifeln durch weitläuftigere Auseinandersetzungen der vorgetragenen Lehren zu begegnen, unser vorzügliches Augenmerk hiebei gewesen ist; um weniger geübten Lesern Zeit des Nachdenkens über Auflösungen und Zergliederungen erregter Schwierigkeiten zu ersparen, und sie geschwinder zu fernern Wahrheiten fortzueilen geschikt zu machen.

Anm. d. Uebers.

menheit von uns gebracht worden wäre, auf welchen nur fernere Unterſuchungen groſser Geiſter, und mehrere Erfahrungen ſie künftig erheben dürften. Ob nun gleich die Verſuche eines Liebhabers mit Meiſterſtüken in gar keine Vergleichung kommen können; ſo wird man doch dieſe meine Arbeit nicht für ſchlechterdings unnütz halten, wenn ich einige Vorſchritte in dieſer Laufbahn gemacht, und etwas zum weitern Fortgange in der Kunſt zu muthmaſsen, und die Ungewiſsheit gewiſſen Regeln zu unterwerfen, beigetragen habe.

Innhalt.

KAPITEL I. *Erklärungen und Fundamentalsätze.* Seite 1

KAPITEL II. *Von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit.* 10

Diese zwei Kapitel enthalten ausser den ersten Grundlehren der Rechnung des Wahrscheinlichen, die Erklärungen der Begriffe von *gewiss*, *möglich*, *unmöglich*, *wahrscheinlich*, und andern Ausdrüken dieser Art, welche gemeiniglich viel öfterer gebraucht und ausgesprochen, als ganz richtig verstanden werden.

KAPITEL III. *Von den figurirten Zahlen.* 21

*Diese Zahlen sind in der Wahrscheinlichkeitsrechnung von vorzüglichem Nutzen, und der Hauptgegenstand dieses Kapitels ist, eine Formel für die Summe der Potenzen einer Reihe figurirter Zahlen zu finden.

KAPITEL IV. *Die Erwartung.** 43

Dieses Kapitel enthält eine leichte Anwendung der bisherigen Lehren auf die Berechnung der zwanzigsten Leipziger Klassen-Lotterie.

KAPITEL V. *Von der Wahrscheinlichkeit der Begebenheiten, wenn sich mehrere Fälle zugleich ereignen.* 55

KAPITEL VI. *Von der Wahrscheinlichkeit der Begebenheiten, wenn sich mehrere Fälle hinter einander in einer bestimmten Ordnung ereignen.* 88

KAPITEL VII. *Von der Wahrscheinlichkeit der Begebenheiten, bei mehrern Versuchen.* 155

Diese drei Kapitel halten eine höchst allgemeine analytische Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung in sich. Ordnung und Deutlichkeit haben wir uns hier zu vereinigen bemüht, jeden einzelnen Satz auf Beispiele angewendet, und ihn dadurch mehr ins Licht zu setzen, und den Gebrauch davon zu zeigen gesucht.

KAPITEL VIII. *Berechnung der Wahrscheinlichkeiten, mittelst Analyse der vorgelegten Fragen.* Seite 246

KAPITEL IX. *Vom Lotto.* 252

KAPITEL X. *Geometrische Aufgaben.* 261

In diesen drei Kapiteln werden ins besondere die Anwendungen gezeigt, welche sich von der vorgetragenen Theorie auf die Auflösung von Fragen machen lassen, die auf die am meisten gewöhnlichen Glüksspiele ihre Beziehung haben; und einige Sätze der gemeinen und höhern Geometrie zur Untersuchung der Wahrscheinlichkeiten gebraucht.

KAPITEL XI. *Berechnung der Wahrscheinlichkeiten durch Erfahrungen oder Beobachtungen.* 280

Dieses Kapitel zeigt, wie sich der Untersuchung der Gröſse von Wahrscheinlichkeiten durch die Erfahrung zu Hülfe kommen läſst, wenn die aufgegebenen Fragen ihrer Natur nach nicht so beschaffen sind, daſs sie einer ganz strengen Rechnung unterworfen werden können.

KAPITEL XII. *Von dem Einfluſs der Zeugniſſe auf die Wahrscheinlichkeiten.* 298

Es ist dieses Kapitel ein Versuch, wie der Einfluſs der Zeugniſſe für oder wider eine wirkliche Begebenheit auf die Wahrscheinlichkeit derselben zu berechnen ist.

DIE

DIE WAHRSCHEINLICHKEITS-RECHNUNG.

Kapitel I.

Erklärungen und Fundamentalsätze.

§. 1.

Unter den verschiedenen Bewegungen, Handlungen oder Zuständen von Dingen vor unsern Augen, giebt es solche, davon wir das Resultat, die Folge oder Wirkung mit Gewisheit bestimmen können; es sei nun aus vielfältigen Erfahrungen, die bei andern ähnlichen Bewegungen, Handlungen oder Zuständen von Dingen gemacht worden sind, oder einer aus Vernunftschlüssen hergeleiteten Kenntnis der Gesetze, wodurch sie bestimmt werden. Diese Wirkungen, Folgen oder Resultate heisen *gewis*.

§. 2.

Es giebt andere Bewegungen, Handlungen oder Zustände von Dingen, davon wir die Resultate, Folgen, oder Wirkungen nicht mit Gewisheit bestimmen können. Dergleichen Resultate, Folgen, oder Wirkungen werden *Glüksfälle* oder *Glüksbegebenheiten* (*hazards*) genannt.

§. 3.

Unter den verschiedenen Bewegungen, Handlungen, oder Zuständen von Dingen, deren Folge oder Wirkung wir nicht mit Gewisheit bestimmen können, giebt es solche, wovon wir verschiedene Resultate anzugeben vermögend sind, die wir *mögliche* nennen, unter

welchen wir verſichert ſind, daſs ſich die unbekannte Wirkung befindet, und auſser welchen wir eben ſo verſichert ſind, daſs dieſe Wirkung ſich nicht befindet.

Dieſes durch ein Beiſpiel ſinnlich zu machen, wollen wir annehmen, daſs Peter zwei gemeine Spielwürfel in einem Becher herumſchüttele, um ſie blindlings heraus auf eine Tafel zu werfen: ehe nun der Wurf geſchehen, ſo iſt das Reſultat davon, nämlich die beſtimmte Anzahl der Augen, die Peter werfen wird, unbekannt; man weiſs aber, daſs es 36 *mögliche* Reſultate giebt, unter welchen man gewiſs iſt, daſs die von Peter geworfenen Augen ſich befinden werden, und auſser welchen man ebenfalls gewiſs iſt, daſs ſie ſich nicht befinden werden. Denn der Würfel A hat 6 mögliche Lagen, ſo daſs von ihm ſechs verſchiedene Mengen der Augen oben fallen können; und zu jeder Anzahl von Augen, die mit dieſem Würfel hervorgebracht worden, können ſechs verſchiedene Mengen von Augen mit dem Würfel B hinzugeworfen werden: woraus man ſiehet, daſs es bei einem Wurfe mit zwei Würfeln 6 mal 6 oder 36 Fälle giebt, die einzig möglich ſind.

§. 4.

Zwei oder mehrere *gleich mögliche* Reſultate ſind, wenn kein Grund vorhanden iſt, der zu dem Geſchehen des einen mehr Hofnung, als zu dem Geſchehen des andern giebt.

So iſt auf einen Wurf mit zwei Würfeln, 5 und 4 Augen, ingleichen 1 und 3 Augen zu werfen, gleich möglich, weil jegliches Paar Augen auf folgende beide Arten hervorgebracht werden kann: nämlich um 5 und 4 zu werfen, entweder der erſte Würfel 5 und der andere 4, oder der erſte Würfel 4 und der andere 5; um 3 und 1 zu werfen, entweder der erſte Würfel 3 und der andere 1, oder der erſte Würfel 1 und der andere 3.

Hingegen 5 und 4 Augen, und 3 und 3 zu werfen, ſind nicht gleich möglich, weil jenes auf zweierlei Arten,

die wir eben angezeigt haben, aber das zweite nur auf eine einzige Art, wenn nämlich von jedem Würfel 3 Augen oben fallen, hervorgebracht werden kann.

Sechs Augen und acht Augen ſind gleich möglich, weil alle beide auf fünf Arten hervorgebracht werden können; nämlich 6 durch 5 und 1, 4 und 2, 3 und 3, 2 und 4, 1 und 5; und 8 durch 6 und 2, 5 und 3, 4 und 4, 3 und 5, 2 und 6.

Hingegen 7 Augen und 8 Augen ſind ungleich möglich, weil 7 Augen auf ſechs verſchiedene Arten geworfen werden können; nämlich durch 6 und 1, 5 und 2, 4 und 3, 3 und 4, 2 und 5, 1 und 6; anſtatt daſs 8 Augen nur auf fünf Arten, die bereits genannt worden, hervorgebracht werden können.

§. 5.

Fälle werden alle die gleich möglichen Reſultate genannt, worunter man verſichert iſt, daſs eine angegebene Glüksbegebenheit ſich befindet, und auſser welchen man gewiſs iſt, daſs ſie ſich nicht befindet. So giebt es bei einem Wurfe mit zwei Würfeln 36 *Fälle*, worunter alle Glüksbegebenheiten, die ein ſolcher Wurf irgend geben kann, befindlich ſind.

§. 6.

Aus dieſer Erklärung der *Fälle* folgt, daſs, wenn man in der Berechnung der Glüksbegebenheiten, die Summe aller *Fälle*, oder einer gewiſſen Menge von *Fällen*, worunter dieſe Begebenheiten befindlich ſind, ausmachen will; man Achtung geben müſſe, daſs die Reſultate, welche man abzählet, alle gleich möglich ſind.

§. 7.

Aus den obigen Erklärungen kann man ſchlieſsen, daſs es keine abſolute Glüksbegebenheiten gebe; ſondern daſs dieſes Wort nur auf die Unwiſſenheit desjenigen, der es gebrauchet, ſich beziehe. Da ſich alles in der Natur nach beſtändigen Geſetzen und gegebenen Kräften bewegt, die das Reſultat einer jeden Handlung, Be-

wegung, oder eines jeden Zustandes bestimmen; so würde es für ein verständiges Wesen, dem diese Gesetze vollkommen bekannt wären, gar keinen Glüksfall geben, sondern für selbiges alles gewiſs sein.

Eben dieses läſst sich von der Möglichkeit sagen, die nicht eine innere Eigenschaft derjenigen Begebenheiten, die wir möglich nennen, sondern nur der Ausdruk unserer Unwissenheit ist, ob diese Begebenheiten existirt oder nicht existirt haben, existiren oder nicht existiren, existiren werden oder nicht existiren werden. Wollte man mit der Idee von der Möglichkeit einer Sache die Idee einer Ursache, die fähig ist, sie existiren zu machen, verbinden, so würde dieses ein offenbarer Irrthum sein; denn eine wahre Ursache kann nicht ohne ihre Wirkung existiren, und in solcher Voraussetzung würde nichts möglich sein, als was wirklich existirt.

§. 8.

Wir entschlieſsen uns öfters, zu Folge einer Voraussetzung von Thatsachen oder Begebenheiten, wovon wir nicht vermögend sind, die Realität mit Gewiſsheit zu behaupten, und die in Beziehung auf uns blos möglich sind. Die Voraussetzung, daſs diese Begebenheiten existirt haben, oder existiren, oder existiren werden, heiſst *Vermuthung* oder *Muthmaſsung*. Demnach ist vermuthen oder muthmaſsen nichts anders, als eine in Beziehung auf uns nur mögliche Begebenheit als reel voraussetzen, auf die Gefahr, wenn die Voraussetzung falsch ist, uns zu betrügen, und den Zwek zu verfehlen, den wir uns dabei vorgesetzt haben.

§. 9.

Eine *Wette* ist ein Vertrag, wodurch zwei Partheien, die eine auf das Geschehen, die andere auf das Nichtgeschehen einer bestimmten möglichen Begebenheit, eine gewisse Geldsumme verpfänden, so daſs diejenige, deren Behauptung zutrift, die von der andern ausgesetzte Summe erhält.

Zum Beispiel. Wenn Peter, der aus einem Becher zwei gemeine Spielwürfel auf einen Tisch werfen will, sich verbindet, im Fall er einen Pasch werfen sollte, an Paul einen Thaler auszuzahlen: und Paul hingegen verspricht dreimal so viel Petern zu bezahlen, wenn lauter ungleiche Augen zum Vorschein kommen: so ist ein solcher Vergleich eine Wette.

§. 10.

Die *Wahrscheinlichkeit* einer Begebenheit ist die Verhältniss der Anzahl der Fälle, welche diese Begebenheit geben, zur Menge aller Fälle, worunter eben diese Begebenheit befindlich ist.

Zum Beispiel. Auf einen Wurf mit zwei Würfeln ist die Wahrscheinlichkeit

12 Augen oder 2 Sechsen zu werfen $=\frac{1}{36}$;
11 Augen zu werfen $=\frac{2}{36}$ oder $\frac{1}{18}$;
10 Augen zu werfen $=\frac{3}{36}$ oder $\frac{1}{12}$;
9 Augen zu werfen $=\frac{4}{36}$ oder $\frac{1}{9}$;
8 Augen zu werfen $=\frac{5}{36}$;
7 Augen zu werfen $=\frac{6}{36}$ oder $\frac{1}{6}$;
5 und 5 zu werfen $=\frac{1}{36}$;
5 und 4 zu werfen $=\frac{2}{36}$ oder $\frac{1}{18}$;
einen Pasch zu werfen $=\frac{6}{36}$ oder $\frac{1}{6}$;
ungleiche Augen zu werfen $=\frac{30}{36}$ oder $\frac{5}{6}$;

weil unter den 36 Fällen, die von dem Werfen mit zwei Würfeln abhängen, ein Fall befindlich ist, der 12 Augen giebt; 2 Fälle befindlich sind, die 11 Augen; 3 die 10; 4 die 9; 5 die 8; 6 die 7 Augen geben; 1 Fall der 5 und 5 giebt; 2 die 5 und 4; 6 die einen Pasch; und 30, die lauter ungleiche Augen geben.

§. 11.

Hieraus folgt, dass die Wahrscheinlichkeiten verschiedener Begebenheiten, die von einer gegebenen Handlung, Bewegung, oder einem gegebenen Zustande abhängen, sich unter einander wie die Mengen der Fälle, die solche Begebenheiten geben, verhalten.

Zum Beispiel. Bei einem Wurfe mit zwei Würfeln verhält sich die Wahrscheinlichkeit eines Pasches zu der, ungleiche Augen zu werfen, wie 6 zu 30, oder $= 1 : 5$.

§. 12.

Es bedeute überhaupt $\frac{n}{m}$ die Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit: so wird diese Wahrscheinlichkeit um so grösser oder kleiner, je nachdem n wächst oder abnimmt, indem der Nenner m ebenderselbe bleibt. Für $n = m$, oder $\frac{n}{m} = 1$, ist die Begebenheit gewiss; weil in dem Falle alle Fälle vortheilhaft sind. Für $n = o$, oder $\frac{n}{m} = o$, ist die Begebenheit unmöglich, oder, welches einerlei ist, das Nichtgeschehen dieser Begebenheit ist gewiss.

§. 13.

Es folgt hieraus, dass die Wahrscheinlichkeit niemals grösser als die Einheit, noch kleiner als o, das ist, verneint sein kann; aber dass sie durch alle Werthe und Stufen der Grösse, so zwischen o und 1 fallen, durchgehen kann.

§. 14.

Wenn $\frac{n}{m}$ die Wahrscheinlichkeit bedeutet, dass eine Begebenheit geschiehet, so ist $\frac{m-n}{m}$ die *entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit*, oder die Wahrscheinlichkeit, dass diese Begebenheit nicht geschiehet; weil, wenn n die Anzahl derjenigen Fälle anzeigt, die diese Begebenheit geben, $m - n$ offenbar die Anzahl der Fälle ist, welche diese Begebenheit nicht geben.

§. 15.

Wenn man die Wahrſcheinlichkeit irgend einer Begebenheit zu der entgegengeſetzten Wahrſcheinlichkeit dieſer Begebenheit addirt, ſo iſt allemal die Summe dieſer Wahrſcheinlichkeiten = 1. Denn $\frac{n}{m} + \frac{m-n}{m} = 1$; welches ſchon daraus erhellet, weil es ſtets gewiſs iſt, daſs eine beſtimmte Begebenheit entweder geſchiehet oder nicht geſchiehet.

§. 16.

Eine Art von Bewegung oder Handlung, die mehrere mögliche Reſultate hat, kann zwei- drei- vier- oder noch mehrmal wiederholet werden. Eine jede ſolche Wiederholung wollen wir einen *Verſuch* nennen.

Zum Beiſpiel. Wenn in einem Beutel 90 Kugeln enthalten ſind, die man unter einander gemiſcht, und deren jede mit einer beſondern Nummer bezeichnet hat, dergleichen diejenigen Kugeln ſind, die im Lottoſpiel gebraucht werden, und jemand blindlings und ohne zu wählen fünf dieſer Kugeln herauszieht, alsdann wieder in den Beutel zurükwirft, und dieſes mehrmal wiederholet; ſo heiſsen dieſe Wiederholungen *Verſuche.*

§. 17.

Die Wahrſcheinlichkeit einer Sache iſt auch die Wahrſcheinlichkeit des Satzes, welcher das Geſchehen derſelben behauptet: dergeſtalt, daſs eine Begebenheit und der Satz, welcher ihre Exiſtenz behauptet, beide mehr oder weniger wahrſcheinlich, oder glaubhaft, oder annehmlich ſind, je nachdem die Verhältniſs der Zahl der Fälle, welche ſolche Begebenheit geben, zur Menge aller Fälle, worunter ſie befindlich iſt, ſich mehr der Einheit nähert, oder von ihr entfernet. Man muſs jedoch bedenken, daſs die Wahrheit und Falſchheit der Begebenheiten und der Sätze, welche ſolche behaupten, durch die Wahrſcheinlichkeit nur in den einzigen Fällen noth-

wendig beſtimmt werden, wo die Wahrſcheinlichkeit $= o$ oder 1 iſt; auſserdem entſcheidet, nach der Strenge genommen, die Wahrſcheinlichkeit nichts über die Realität der Begebenheiten, und zuweilen trägt ſich juſt das zu, welches das weniger wahrſcheinliche iſt. Es iſt unterdeſſen gewiſs, daſs die öftere Wiederereigniſs ebenderſelben Begebenheiten bei einer Menge von Verſuchen, der Wahrſcheinlichkeit dieſer Begebenheiten ohngefähr proportional iſt; daſs uns die Vermuthungen um ſo weniger einem Irrthum ausſetzen, und uns um ſo ſeltener betrügen, je wahrſcheinlicher die vermutheten Begebenheiten ſind.

§. 18.

Eine *rechtmäſsige Wette* heiſst, bei welcher die Miſen oder die Summen, welche die Wettenden verpfändet haben, ſich unter einander wie die Wahrſcheinlichkeiten der Begebenheiten verhalten, auf deren Wirklichkeit jene Summen geſetzt worden ſind.

Geſetzt daſs Peter eine Summe s auf das Geſchehen einer Begebenheit ſetzt, deren Wahrſcheinlichkeit $\frac{n}{m}$ iſt; ſo muſs die Miſe des Paul, welcher auf das Nichtgeſchehen dieſer Begebenheit wettet, damit die Wette rechtmäſsig wird, $s . \frac{m-n}{n}$ ſein: denn wenn die Miſe des Paul x genannt wird, ſo hat man folgende Proportion: Die Wahrſcheinlichkeit der Begebenheit, auf welche Peter wettet, verhält ſich zur Wahrſcheinlichkeit der Begebenheit, auf welche Paul wettet, wie ſich verhält die Miſe des Peter zur Miſe des Paul; oder welches einerlei iſt, $\frac{n}{m} : \frac{m-n}{m} = s : x$, wo man $x = s . \frac{m-n}{n}$ findet.*)

*)Oder (nach §. 11.) $n : (m-n) = s : x$, das heiſst, die Miſe des Peter verhält ſich zur Miſe des Paul, wie die Summe der günſtigen Fälle für den Peter zu der Summe der widrigen

§. 19.

Wenn bei einer rechtmäſsigen Wette die Miſe des einen Spielers nebſt der Wahrſcheinlichkeit der einen Begebenheit gegeben iſt, ſo kann man daraus die Miſe des andern Spielers und die Wahrſcheinlichkeit der andern Begebenheit leicht herleiten. So wird, wenn die Wahrſcheinlichkeit der Begebenheit, auf welche Peter wettet, $= \frac{1}{6}$, und die Miſe des Paul $= 15$ iſt; die Wahrſcheinlichkeit der Begebenheit, auf welche Paul wettet, $= \frac{5}{6}$, und die Miſe des Peter $= 3$ ſein.

§. 20.

In einer rechtmäſsigen Wette müſſen die Miſen einander gleich ſein, wenn die Wahrſcheinlichkeit einer jeden Begebenheit $= \frac{1}{2}$ iſt; und umgekehrt, wenn die Wahrſcheinlichkeit $= \frac{1}{2}$ iſt, und die Miſen einander gleich ſind, ſo iſt die Wette rechtmäſsig.

§. 21.

Es iſt zu merken, daſs die Rechtmäſsigkeit einer Wette vorausſetzt, daſs die Wahrſcheinlichkeiten der Begebenheiten, welche der Gegenſtand der Wette ſind, von den Wettenden auf einerlei Art gefunden worden; auſserdem würde die Rechtmäſsigkeit leiden, ſelbſt im moraliſchen; gänzlich aber aufgehoben würde ſie ſein, woſern einer der Wettenden von der Begebenheit, auf welche er wettet, gewiſs wäre.

§. 22.

Ferner iſt zu merken, daſs dieſe numeriſche Rechtmäſsigkeit der Wetten in Betracht der Wettenden ſelten die Gleichheit der phyſiſchen Vortheile und Nachtheile begreift; weil phyſiſcher Vortheil und Nachtheil, der mit einem gewiſſen Gewinn oder Verluſt verbunden iſt, bei der verſchiedenen Beſchaffenheit der Vermögensumſtände der Wettenden, ſelten den gewonnenen oder verlornen Summen proportionirt iſt. Ein Menſch, zum

Fälle für ebendenſelben, oder zu der Summe der günſtigen Fälle für den Paul. *Anm. d. Ueberſ.*

Beispiel, dessen ganzes Vermögen 5000 Gulden ausmachte, die zu Bestreitung aller seiner Bedürfnisse zureichten, würde, obschon bei gleichem Spiele, doch mit sehr grossem Nachtheile, diese Summe gegen den Besitzer von einer Million setzen, für den der Gewinn oder Verlust dieser Summe fast von keinem Belang ist; in Erwägung, dass kein gegenseitiges Aufheben des Vortheils gegen den Nachtheil statt findet, wenn es auf die Gewinnung des Ueberflüssigen, und den Verlust des Nothwendigen ankommt; In diesem Sinne dürfte demnach keine Wette, als höchstens nur in dem Falle rechtmässig sein, wenn die Wettenden in gleichen Glüksumständen sich befinden, und ihr Wohlstand von den aufs Spiel gesetzten Geldsummen unabhängig ist.

Kapitel II.

Von der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit.

§. 1.*

Aufgabe. *Zu finden, wie oft unter allen möglichen Würfen, von einem Würfel bis auf sechse, u. s. w. jede mögliche Anzahl Augen geworfen werden kann.*

Auflösung. I. Bei einem Würfel giebt es 6 verschiedene gleich mögliche Fälle: 1, 2, 3, 4, 5, 6; weil er von 6 Seiten eingeschlossen wird, und man annimmt, dass er eine vollkommen würflichte Gestalt habe. Für zwei Würfel ist die Anzahl aller möglichen Fälle = 36. (Kap. I. §. 3.) Desgleichen ist die Anzahl aller möglichen Würfe mit 3 Würfeln = 216; weil, wenn mit dem ersten und zweiten Würfel einer von den vorhin genannten 36 Fällen sich ereignet, zu gleicher Zeit irgend einer von den sechs verschiedenen Fällen des dritten Würfels sich ereignen kann. Und so erhellet ferner, dass durch jeden hinzukommenden Würfel die Anzahl

der Fälle bei den vorigen Würfeln ſechsmal vermehret wird. Es iſt alſo

für Würfel	die Anzahl aller möglichen Fälle	
1	$6 =$	6
2	$6^2 =$	36
3	$6^3 =$	216
4	$6^4 =$	1296
5	$6^5 =$	7776
6	$6^6 =$	46656
⋮	⋮	
n	6^n	

II. Bei zwei Würfeln muſs um $\left\{\begin{matrix}2\\12\end{matrix}\right\}$ zu werfen, jeder Würfel $\left\{\begin{matrix}\text{ein Aſs}\\\text{eine Sechſe}\end{matrix}\right\}$; um $\left\{\begin{matrix}3\\11\end{matrix}\right\}$ zu werfen, entweder der Würfel A $\left\{\begin{matrix}\text{ein Aſs}\\\text{eine Fünfe}\end{matrix}\right\}$ und der Würfel B $\left\{\begin{matrix}\text{eine 2}\\\text{eine 6}\end{matrix}\right\}$, oder A $\left\{\begin{matrix}\text{eine 2}\\\text{eine 6}\end{matrix}\right\}$ und B $\left\{\begin{matrix}\text{ein Aſs}\\\text{eine Fünfe}\end{matrix}\right\}$; um $\left\{\begin{matrix}4\\10\end{matrix}\right\}$ zu werfen, entweder A $\left\{\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right\}$ und B $\left\{\begin{matrix}3\\6\end{matrix}\right\}$ Augen, oder A $\left\{\begin{matrix}3\\6\end{matrix}\right\}$ und B $\left\{\begin{matrix}1\\4\end{matrix}\right\}$ Augen, oder A $\left\{\begin{matrix}2\\5\end{matrix}\right\}$ und B $\left\{\begin{matrix}2\\5\end{matrix}\right\}$ Augen geben. Verfährt man eben ſo, die noch übrigen Summen der Augen zu finden; ſo ergiebt ſich, daſs mit 2 Würfeln geworfen werden können:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Augen
1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	mal.

Und eben ſo findet man, daſs mit 3 Würfeln geworfen werden können:

3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Aug.
1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1	mal.

III. Um aber für jede Anzahl Würfel zu finden, wie oft unter allen möglichen Würfen jede mögliche Anzahl Augen geworfen werden könne, erwäge man folgendes:

a) Da durch jeden hinzukommenden Würfel die Anzahl der Fälle bei der vorigen Anzahl Würfel um 6 vervielfacht wird (I); so muſs die Anzahl der Würfe bei der vorigen Anzahl Würfel 6 mal genommen werden, um die Anzahl der Würfe der um eins gröſsern Anzahl Würfel daraus herzuleiten. Für 3 Würfel z. B. iſt die Anzahl der Würfe =

$$6. (1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1)$$

b) Nun ſei A die Reihe, welche anzeigt, wie vielmal jeder mit n Würfeln mögliche Wurf vorkommt: Man ſoll aus ihr die Reihe C für $(n+1)$ Würfel herleiten. *Z. B.* Für $n=2$ iſt (II)

$$A = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5, 4, 3, 2, 1$$

und die geſuchte Reihe für $n+1=3$

$$C = 1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27, 27, 25, 21, 15, 10, 6, 3, 1.$$

Die Reihe A hat $6n-(n-1)=5n+1$ Glieder, weil der niedrigſte Wurf mit n Würfeln $=n$, und der höchſte $=6n$ iſt. In ihr zeigt

das 1ſte Glied, wie vielmal n Augen geworfen werden,
— 2te — — — $(n+1)$ — — —
— 3te — — — $(n+2)$ — — —
— 4te — — — $(n+3)$ — — —
.
— mte — — — $(n+m-1)$ — — —
.
— $(5n+1)$te — — $(n+5n)$ — — —

Verbindet man mit dem Wurfe $(n+m-1)$, der Qmal vorkomme, jede Seite des hinzukommenden Würfels, ſo kann dieſes mit jeder Seite Qmal geſchehen. Aber der Wurf wird dann aus $n+m-1$: $n+m$; $n+m+1$; $n+m+2$; $n+m+3$; $n+m+4$; $n+m+5$; je nachdem die Seite 1, 2, 3, 4, 5, 6 des hinzugekommenen

Würfels mit dem Wurfe $n+m-1$ verbunden wird. Hiedurch ändert sich nun zwar die Anzahl der Augen, aber nicht die Anzahl der Fälle, und zugleich folgt hieraus: dafs man, um aus der Reihe *A* die Reihe *C* herzuleiten, jene sechsmal so untereinander schreiben müsse, dafs man bei jeder Reihe eine Stelle weiter nach der rechten Hand zurükt. Die Reihe, welche aus der Summe jeder senkrechten Kolumne entsteht, wird die gesuchte Reihe *C* sein. *Z. B.* Wenn

$$\begin{array}{lccccccccccccl} & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & \text{Augen} \\ A = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & . \end{array}$$

diejenige Reihe ist, welche andeutet, wie vielmal jeder mit zwei Würfeln mögliche Wurf vorkommt, so ist

$$5 \cdot (1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1)$$

die Anzahl der Fälle, die zu *A* hinzukommen müssen, um die Summe aller möglichen Fälle für 3 Würfel zu erhalten. Verbindet man nun mit dem Wurfe: 2 Augen, der einmal vorkommt, jede Seite des hinzugekommenen Würfels; so kann dieses mit jeder Seite nur einmal geschehen, daraus wird aber der Wurf:

$$\begin{array}{cccccccl} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \text{mal} \\ & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8 & \end{array}$$

(je nachdem die Seite 1, 2, 3, 4, 5, 6 des hinzugekommenen Würfels oben liegt) davon jeder nur einmal vorkommt. Ferner, verbindet man mit dem Wurfe 3 Augen, der 2 mal vorkommt, jede Seite des hinzugekommenen Würfels, so kann dieses mit jeder Seite 2 mal geschehen, daraus wird aber der Wurf:

$$\begin{array}{ccccccl} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & \text{mal} \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \end{array}$$

je nachdem die Seite 1, 2, 3, 4, 5, 6 des hinzugekommenen Würfels oben liegt, davon jeder Wurf zweimal vorkommt. Und so weiter. Dafs also die Summe jeder senkrechten Kolumne folgender Reihe:

1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1					
	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1				
		1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1			
			1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1		
				1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	
					1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

die gesuchte Reihe $C =$

1 3 6 10 15 21 25 27 27 25 21 15 10 6 3 1

giebt. Die hier (Seite 15.) beigefügte Tabelle zeigt die verschiedenen Summen der Augen bei 1 bis 6 Würfeln; und wie oft unter allen möglichen Würfen, von einem Würfel bis auf 6, jede mögliche Anzahl Augen geworfen werden kann. Die Anzahl der letzten Würfe bei 4, 5 und 6 Würfeln ist zur Ersparung des Raums weggelassen worden, sie kann aber leicht ergänzt werden, weil die Reihen von der höchsten Anzahl der Würfe an, eben so abnehmen, wie sie von der kleinsten Anzahl bis zur höchsten gestiegen sind.

§. 2.*

1) Fragt man, wie oft mit 3 Würfeln eine Terne oder ein Pasch geworfen werden kann, das heisst nach der Anzahl der Fälle, dass 3, oder nur 2 gleiche Augen oben stehen; so ist offenbar, dass, um eine Terne zu werfen, es einen Fall für 3 Sechsen, oder für 3 Fünfen, Vieren, Dreien, Zweien oder 3 Einsen giebt, und demnach die Anzahl aller Fälle $= 6$ ist; dass es aber 15 Fälle giebt, wo 2 Sechsen *), oder Fünfen, u. s. f. geworfen werden können, und also die gesuchte Anzahl der Päsche $= 15.6$ oder 90 ist.

2) Bei 4 Würfeln ist die Anzahl der Würfe mit ungleichen Augen $= 6.5.4.3 = 360$; mit einem Pasch

*) Diese können nämlich mit dem (1sten und 2ten; 1, 3; 2, 3;) Würfel geworfen werden, und zu jedem dieser 3 Fälle können die Augen 1, 2, 3, 4, oder 5 des dritten Würfels fallen, welches also 3.5 oder 15 Fälle giebt.

TABELLE.

Bei Würfeln	sind die verschiedenen Summen der Augen																									
1	1	2	3	4	5	6																				
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12															
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18										
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24					
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31 etc.

Summen der Augen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	etc.
m. Würfeln I.	1	1	1	1	1	1																	
II.		1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1											
III.			1	3	6	10	15	21	25	27	27	25	21	15	10	6	3	1					
IV.				1	4	10	20	35	56	80	104	125	140	146	140	125	104	80	56	35	20	10	etc.
V.					1	5	15	35	70	126	205	305	420	540	651	735	780	780	735	651	540	420	etc.
VI.						1	6	21	56	126	252	456	756	1161	1666	2247	2856	3431	3906	4221	4332	4221	etc.

mal

und 2 ungleichen Augen $= 6.5.4.6 = 720$; mit 2 ungleichen Päſchen $= 6.5.3 = 90$; mit einer Terne $= 4.5.6 = 120$; mit einer Quaterne $= 6$; alſo in Summe $360 + 720 + 90 + 120 + 6 = 1296$ Würſe $= 6^4$ wie es ſein muſs. (§. 1. I).

§. 3. *

Wenn von zwei oder mehrern Begebenheiten, die ſich auf einerlei Handlung u. ſ. f. beziehen, gefragt wird, wie wahrſcheinlich es ſei, daſs entweder die eine oder die andere, u. ſ. f. ſich zutrage, ſo findet man die Wahrſcheinlichkeit dieſer Begebenheit, wenn man die Summe der Wahrſcheinlichkeiten aller einzelnen Begebenheiten ſucht.

Zum Beiſpiel. Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit mit 6 Würfeln auf einen Wurf entweder 8 oder 9 Augen zu werfen?

Man ſuche erſtens die Wahrſcheinlichkeit mit ſechs Würfeln in einem Wurfe 8 Augen zu werfen; dann die Wahrſcheinlichkeit mit eben ſo viel Würfeln in einem Wurfe 9 Augen zu werfen. Jene iſt (Tabelle §. 1. III) $= \frac{21}{46656}$; dieſe (ebendaſelbſt) $= \frac{56}{46656}$. Folglich iſt die geſuchte Wahrſcheinlichkeit $= \frac{21}{46656} + \frac{56}{46656} = \frac{77}{46656}$.

Denn aus angeführtem Orte iſt die Anzahl der Fälle 8 Augen zu werfen $= 21$, und 9 Augen $= 56$, folglich die Anzahl der günſtigen Fälle $= 21 + 56$, und die geſuchte Wahrſcheinlichkeit $= \frac{21+56}{6^6} = \frac{21}{6^6} + \frac{56}{6^6}$.

Eben ſo findet man die Wahrſcheinlichkeit mit 6 Würfeln auf einen Wurf entweder 12, 15 oder 20 Augen zu werfen $= \frac{456 + 1666 + 4221}{6^6} = \frac{6343}{46656}$. Und ſo weiter.

§. 4.

Erklärung. Man nennet *zuſammengeſetzte Wahrſcheinlichkeit* diejenige, welche das Produkt aus mehrern andern Wahrſcheinlichkeiten iſt. So iſt die Wahrſcheinlichkeit

lichkeit $\frac{nqsu}{mprt}$ aus den Wahrscheinlichlichkeiten $\frac{n}{m}$, $\frac{q}{p}$, $\frac{s}{r}$, $\frac{u}{t}$ zusammengesetzt.

§. 5.

Lehrsatz. *Wenn zwei verschiedene Handlungen, Bewegungen, u. s. f. gegeben sind, und von der ersten eine Begebenheit, deren Wahrscheinlichkeit* $=\frac{n}{m}$, *von der zweiten eine Begebenheit, deren Wahrscheinlichkeit* $=\frac{q}{p}$ *ist, abhänget; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle beide Begebenheiten sich ereignen werden, aus den Wahrscheinlichkeiten dieser beiden Begebenheiten zusammengesetzt, oder* $=\frac{nq}{mp}$.

Beweis. I. Ein jeder von den m Fällen, worunter die erste Begebenheit sich befindet, kann mit einem jeden der p Fälle, worunter die zweite Begebenheit ist, zusammentreffen; also ist die Anzahl der Fälle, wo zwei verschiedene Begebenheiten zusammentreffen können, $=mp$.

II. Ein jeder der n Fälle, welche für die erste Begebenheit günstig sind, kann mit einem jeden der q Fälle, welche die zweite Begebenheit geben, zu gleicher Zeit geschehen; also ist die Anzahl der Fälle, welche die zwei Begebenheiten zugleich geben, $=nq$.

III. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dass die zwei Begebenheiten sich ereignen werden, $=\frac{nq}{mp}$ (Kap. I. §. 10.) *W. Z. E.*

§. 6.

Zusatz. I. *Wenn 3, 4, 5 oder eine noch grössere Anzahl verschiedener Handlungen, Bewegungen, u. s. f. gegeben sind, und von der*

$\left\{\begin{matrix}\textit{1ſten}\\ \textit{2ten}\\ \textit{3ten}\\ \textit{4ten}\\ \ldots\end{matrix}\right\}$ *eine Begebenheit abhängt, deren*

Wahrſcheinlichkeit $\left\{\begin{matrix}\frac{n}{m}\\ \frac{q}{p}\\ \frac{s}{r}\\ \frac{u}{t}\\ \ldots\end{matrix}\right\}$ *iſt; ſo wird die Wahrſcheinlichkeit, daſs alle dieſe Begebenheiten zuſammentreffen, aus ihren einzelnen Wahrſcheinlichkeiten zuſammengeſetzt, das iſt, dem Produkte* $\frac{n\,q\,s\,u\,\ldots\ldots}{m\,p\,r\,t\,\ldots\ldots}$ *gleich ſein.*

Denn die Wahrſcheinlichkeit, daſs die zwei erſten Begebenheiten zuſammentreffen, iſt, wie nur (§. 5.) erwieſen worden, $= \frac{n\,q}{m\,p}$; alſo wird die Wahrſcheinlichkeit, daſs die drei erſten Begebenheiten zuſammentreffen, aus der Wahrſcheinlichkeit der Begebenheit, welche aus dem Zuſammentreffen der beiden erſten Begebenheiten entſteht, das iſt, aus $\frac{nq}{mp}$, und aus der Wahrſcheinlichkeit der dritten Begebenheit, das iſt, aus $\frac{s}{r}$ zuſammengeſetzt, und demnach $\frac{n\,q\,s}{m\,p\,r}$ ſein. Auf eben die Art wird bewieſen, daſs die Wahrſcheinlichkeit des Zuſammentreffens der drei erſten Begebenheiten mit der vierten, $\frac{n\,q\,s}{m\,p\,r} \cdot \frac{u}{t}$ oder $\frac{n\,q\,s\,u}{m\,p\,r\,t}$ iſt; und ſo weiter.

§. 7.

Zuſatz. II. Sind die Handlungen, Bewegungen, oder Zuſtände einander gleich, und die verſchiedenen Wahrſcheinlichkeiten $\frac{n}{m}$, $\frac{p}{m}$, $\frac{q}{m}$, ... an der Zahl x; ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs man auf das $\left\{\begin{matrix}\text{erſtemal}\\ \text{zweitemal}\\ \text{drittemal}\\ \ldots\ldots\end{matrix}\right\}$ die Begebenheit, deren Wahrſcheinlichkeit $=\left\{\begin{matrix}\frac{n}{m}\\ \frac{p}{m}\\ \frac{q}{m}\\ \ldots\end{matrix}\right\}$ iſt, hervorbringet, $=\frac{npq\ldots\ldots}{m^x}$.

Für $n=p=q=\ldots$, bekömmt man die Wahrſcheinlichkeit, daſs alle dieſe Begebenheiten zuſammen geſchehen $=\left(\frac{n}{m}\right)^x$.

§. 8.

Beiſpiele. Wenn Peter, Jakob und Johann, jeder zwei Würfel auf einen Tiſch wirft; ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs Peter einen Paſch, Jakob keinen Paſch, und Johann 7 Augen werfen wird, $=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}$ oder $\frac{5}{216}$.

Die Wahrſcheinlichkeit mit 2 Würfeln viermal hintereinander einen Paſch zu werfen, iſt $=\frac{1}{6^4}$ oder $\frac{1}{1296}$; und viermal hintereinander zwei Sechſen zu werfen, $=\frac{1}{36^4}=\frac{1}{1679616}$.

§. 9.

Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit mit 6 Würfeln auf einen Wurf ſechs verſchiedene Augen zu werfen?

Hier iſt $\frac{n}{m}=\frac{6}{6}=1$; $\frac{p}{m}=\frac{5}{6}$; $\frac{q}{m}=\frac{4}{6}$; $\frac{r}{m}=\frac{3}{6}$; $\frac{s}{m}=\frac{2}{6}$; $\frac{t}{m}=\frac{1}{6}$; $m=6$; $x=6$; alſo die geſuchte Wahrſcheinlichkeit $=\frac{6.\ 5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}{6.\ 6.\ 6.\ 6.\ 6.\ 6}=\frac{5.\ 4.\ 3.\ 2.\ 1}{6^5}=\frac{5}{324}$.

Was iſt die Wahrſcheinlichkeit mit einem Würfel in ſechs Würfen beim erſten Wurf ein Aſs, beim zweiten eine 2, beim dritten eine 3, beim vierten eine 4, beim fünften eine 5, und endlich beim ſechſten eine 6 zu werfen?

Hier iſt $\frac{n}{m}=\frac{1}{6}$, $x=6$, alſo die geſuchte Wahrſcheinlichkeit $=\frac{1}{6^6}=\frac{1}{46656}$.

§. 10.

Die Handlungen, Bewegungen oder Zuſtände, wovon die Begebenheiten, deren Wahrſcheinlichkeit geſucht wird, abhängen, werden die Urſachen oder die Anzeichen dieſer Begebenheiten genannt, je nachdem man vermuthen kann, daſs ſie ſolche entweder hervorbringen oder begleiten. Im erſten Falle heiſsen die Begebenheiten *Wirkungen*, im zweiten aber *bedeutete Sachen*. Sowohl in dem einen, als in dem andern Falle kann nur allein die Gewiſsheit der Ereignung der Urſache oder des Zeichens, der Wirkung oder der angezeigten Sache den Grad der Wahrſcheinlichkeit, der ihr zukommt, überlaſſen. Alſo wird die Wahrſcheinlichkeit, daſs Peter zwei Sechſen werfen wird, $=\frac{1}{36}$ nur in dem Falle ſein, wenn es gewiſs iſt, daſs er zwei Spielwürfel auf einen Tiſch werfen wird: und die Wahrſcheinlichkeit, daſs Peter den genannten Paſch 6 und 6 werfen wird, iſt $=\frac{1}{6}$ nur allein in dem

Falle, wenn es gewifs ift, dafs er einen Pafch werfen wird. Und umgekehrt kann die Gewifsheit der Ereignung der Wirkung oder Bedeutung, der Urfache oder dem Zeichen den Grad der Wahrfcheinlichkeit, der ihnen zugehört, überlaffen. Wenn aber die Urfache oder das Zeichen auf der einen Seite, und die Wirkung oder angezeigte Begebenheit auf der andern Seite, ungewifs ift, fo ift alsdann die Wahrfcheinlichkeit, dafs beides Urfache und Wirkung, oder Zeichen und angezeigte Begebenheit exiftiren, aus den einzelnen Wahrfcheinlichkeiten der Urfache und Wirkung, oder des Zeichens und der angezeigten Sache, zufammengefetzt, das ift, das Produkt aus diefen einzelnen Wahrfcheinlichkeiten.

Wenn zum Beifpiel die Wahrfcheinlichkeit, dafs Peter zwei Würfel auf eine Tafel werfen wird, $= \frac{n}{m}$ ift: fo ift die Wahrfcheinlichkeit, dafs er einen Pafch werfen wird, $= \frac{n}{6m}$; und die Wahrfcheinlichkeit, dafs diefer Pafch ein Pafch von zwei Sechfen fein wird, $= \frac{n}{m} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$ oder $\frac{n}{36m}$.

Kapitel III.

Von den figurirten Zahlen.

§. 1.

Weil die fogenannten *figurirten* Zahlen in der Theorie fowohl als in der Ausübung der Wahrfcheinlichkeitsrechnung fehr häufig gebrauchet werden; fo haben wir es für nützlich und bequem erachtet, eine kurze Abhandlung über diefe Arten von Zahlen mitzutheilen, und ihr daher gegenwärtiges Kapitel gewidmet.

§. 2. *

Man findet *fummatorifche Reihen* auf die Art, dafs man das erfte und zweite Glied der gegebenen Reihe,

welche alsdann die *Grundreihe* genannt wird, addirt, zur Summe wieder das dritte Glied, und ſo weiter, zur Summe aller vorhergehenden Glieder jedesmal das nächſtfolgende ſetzt. Die ſummatoriſche Reihe kann man wieder als Grundreihe annehmen, auf die nur beſchriebene Art eine neue ſummatoriſche Reihe ſuchen, und dieſes Verfahren, ſo weit man will, fortſetzen.

§. 3.

Iſt nun jedes Glied der Grundreihe *Eins*, oder iſt die Grundreihe die Reihe der *Einheiten*; ſo bekömmt man zur ſummatoriſchen Reihe die Reihe der *natürlichen Zahlen*, ſo wie ſie von Eins anfangen, und der Ordnung nach auf einander folgen, wenn man unter jede Einheit der Grundreihe, die Summe dieſer Einheit und aller derjenigen Einheiten, die ihr linker Hand vorhergehen, ſetzt:

Grundreihe	1	1	1	1	1	1	u.ſ.f.	*die beſtändigen*
		1	1	1	1	1		*Zahlen.*
			1	1	1	1		
				1	1	1		
					1	1		
						1		
ſummatoriſche Reihe	1	2	3	4	5	6	u.ſ.f.	*d. natürl. Zahlen*

Wenn man hievon die ſummatoriſche Reihe ſucht, und alſo unter jedes Glied die Summe deſſelben und aller natürlichen Zahlen, die ihm linker Hand vorhergehen, ſchreibt; ſo entſtehet eine dritte Reihe, deren Zahlen den Namen *Triangularzahlen* führen:

Grundreihe	1	2	3	4	5	6	u.ſ.f.	*die natürlichen Zahlen*
		1	2	3	4	5		
			1	2	3	4		
				1	2	3		
					1	2		
						1		
ſummatoriſche Reihe	1	3	6	10	15	21	u.ſ.f.	*die Triangularzahlen.*

Sucht man von dieſer abermals eine neue ſummatoriſche Reihe, indem man unter jede Triangularzahl die Summe dieſer Zahl und aller vorhergehenden Triangularzahlen ſetzt, ſo entſteht die Reihe der *Quadrangularzahlen:*

Grundreihe	1	3	6	10	15	21	u. ſ. f. *die Triangularzahlen*
		1	3	6	10	15	
			1	3	6	10	
				1	3	6	
					1	3	
						1	
ſummatoriſche Reihe	1	4	10	20	35	56	u. ſ. f. *die Quadrangularzahlen.*

Schreibt man unter jede Quadrangularzahl die Summe derſelben und aller dererjenigen, welche ihr linker Hand vorhergehen, ſo entſtehet eine fünfte Reihe von Zahlen, welche den Namen *Quinquangularzahlen* erhalten:

1 5 15 35 70 126 u. ſ. f. *die Quinquangularzahlen.*

Fährt man jetzt auf die gelehrte Art weiter fort, ſo daſs jede ſchon gefundene Reihe wieder die Grundreihe von einer neuen ſummatoriſchen Reihe wird; ſo findet man nach und nach die Reihe der *Sexangularzahlen*, *Septangularzahlen*, und ſo weiter, und allgemein die Reihe der *m*tangularzahlen, deren erſtes Glied $= 1$, und zweites $= m$ iſt.

§. 4.*

Die auf dieſe Art entſtandenen Zahlen heiſsen überhaupt: *figurirte Zahlen*, und laſſen ſich nach der Ordnung in folgender Tafel vorſtellen, worinnen Kolumne I, II, III, u. ſ. f. die Reihe der Einheiten, der natürlichen Zahlen, der Triangularzahlen, u. ſ. f. iſt, und eine jede Kolumne auf die angegebene Berechnungsart leicht weiter fortgeſetzt werden kann. Uebrigens zähle man, ſo lange nichts anders erinnert wird, die Glieder dieſer ſummatoriſchen Reihen ſo, daſs man die Summe von *n*

Gliedern der Grundreihe für das *n*te Glied der summatorischen Reihe annimmt. Auf diese Art wird das erste Glied jeder summatorischen Reihe = 1 sein.

TAFEL
DER FIGURIRTEN ZAHLEN.

Kolumne	I	II	III	IV	V	VI
I	1	1	1	1	1	1
II	1	2	3	4	5	6
III	1	3	6	10	15	21
IV	1	4	10	20	35	56
V	1	5	15	35	70	126
VI	1	6	21	56	126	252
VII	1	7	28	84	210	462
VIII	1	8	36	120	330	792
IX	1	9	45	165	495	1287
X	1	10	55	220	715	2002
XI	1	11	66	286	1001	3003
XII	1	12	78	364	1365	4368

§. 5.*

Man kann auch andere arithmetische Progressionen, und überhaupt jede arithmetische Progression, die von Eins anfängt, zum Grunde legen: wir werden uns aber hier nur allein mit denjenigen figurirten Zahlen beschäftigen, welche aus der Progression der in natürlicher Ordnung fortschreitenden Zahlen entspringen, und in der (§. 4.) beigefügten Tabelle angegeben werden.

§. 6.*

Das *n*te oder allgemeine Glied der summatorischen Reihe, welches auch das *summatorische Glied der Grundreihe* genannt wird, ist eine Funktion, nicht nur derjeni-

gen Zahl (n), die anzeigt, wie viel Glieder der Grundreihe man bis dahin in die Summe gebracht hat, oder des *Index des letzten in die Summe gebrachten Gliedes der Grundreihe;* sondern auch der Zahl (m), des *Index der Reihe*, welche man bekömmt, wenn man die Reihen von der ersten Grundreihe an, und diese dazu zählt.

Dieses werden folgende Betrachtungen (§. 7—15) in ein helleres Licht setzen.

§. 7.

Das summatorische Glied jeder Reihe als Grundreihe angenommen (§. 6.) ist zugleich das allgemeine Glied der folgenden summatorischen Reihe. Nämlich:

Aus den (§. 3.) gegebenen Erklärungen folgt, daſs eine figurirte Zahl, welche die nte Stelle vom Anfange in ihrer Reihe einnimmt, und zur mten Ordnung gehört, oder die nte mtangularzahl, der Summe der n ersten figurirten Zahlen der ($m-1$)ten Ordnung, oder der Summe der n ersten ($m-1$)tangularzahlen, gleich ist.

Zum Beispiel: Die zwanzigste Triangularzahl ist die Summe der zwanzig ersten natürlichen Zahlen; die siebente Zahl der fünften Ordnung oder die siebente Quinquangularzahl ist der Summe der sieben ersten Quadrangularzahlen gleich; u. s. f.

§. 8.

Eine figurirte Zahl, welche zur mten Ordnung gehört, und die nte Stelle vom Anfange an in ihrer Reihe einnimmt, ist der figurirten Zahl gleich, welche zur nten Ordnung gehört, und die mte Stelle vom Anfang in ihrer Reihe einnimmt, oder die nte mtangularzahl ist mit der mten ntangularzahl einerlei.

Zum Beispiel. Die siebente Triangularzahl ist der dritten Septangularzahl gleich; die dritte Quadrangularzahl ist der vierten Triangularzahl gleich; u. s. w. *)

*) Man kann sich hievon aus der beigefügten Tafel (§. 4.) überzeugen; es wird aber (§. 13. und 14.), wo wir die allgemeine Form der figurirten Zahl jeder Ordnung suchen werden, näher bewiesen werden. *Anmerk. d. Uebers.*

ZAHLEN DER KOLUMNEN.

ZAHLEN DER GLIEDER.	I	II	III	IIII	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
I	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
II	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
III	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
IV	1	3	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
V	1	4	6	4	1	0	0	0	0	0	0	0
VI	1	5	10	10	5	1	0	0	0	0	0	0
VII	1	6	15	30	15	6	1	0	0	0	0	0
VIII	1	7	21	35	35	21	7	1	0	0	0	0
IX	1	8	28	56	70	56	28	8	1	0	0	0
X	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	0	0
XI	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	0
XII	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1

§. 9. *

Lehrsatz. *Wenn man die figurirten Zahlen wie in beistehender Tafel ordnet, so, dass dem ersten wirklichen Gliede 1 der zweiten Kolumne eine Null, der dritten Kolumne zwei Nullen, der vierten drei Nullen, und überhaupt dem ersten wirklichen Gliede der m ten Kolumne (m − 1) Nullen vorausgehen: so verhält sich die Summe von so viel Gliedern, als man will, der m ten Ordnung, vom ersten Gliede 0 an gerechnet, zu dem letzten, mit der Anzahl der angenommenen Glieder gevielfältigten Gliede, wie die Einheit (1) zu der Zahl, welche die Ordnung der Kolumne anzeigt (m).*

Zum Beispiel. Für Kolumne II, $0+1+2+3 : 4 \cdot 3 = 1 : 2$; für Kolumne III, $0+0+1+3+6 : 5 . 6 = 1 : 3$; und so weiter.

Beweis. Denn es seien zwei unmittelbar auf einander folgende Reihen der Tafel P und S: und zwar

P	S
a	0
b	g
c	h
d	k
e	l
f	p
	q

stelle P die mte, also S die $(m+1)$te Reihe vor, und man setze, dass der Satz für die Kolumne P wahr sei, dass also in der Kolumne P die Summe von

$$\left\{\begin{matrix} n \\ n-1 \\ n-2 \\ n-3 \\ n-4 \\ n-5 \end{matrix}\right\} \text{Gliedern, oder} \left\{\begin{matrix} a+b+c+d+e+f \\ a+b+c+d+e \\ a+b+c+d \\ a+b+c \\ a+b \\ a \end{matrix}\right\} \text{zu} \left\{\begin{matrix} n\, f \\ (n-1)\, e \\ (n-2)\, d \\ (n-3)\, c \\ (n-4)\, b \\ (n-5)\, a \end{matrix}\right\}$$

sich verhalte wie $1 : m$; so folget, dass

$$\left.\begin{array}{l} q=\frac{nf}{m}, \text{ weil } a+b+c+d+e+f=q \\ p=\frac{(n-1)e}{m}, \text{ weil } a+b+c+d+e=p \\ l=\frac{(n-2)d}{m}, \text{ weil } a+b+c+d=l \\ k=\frac{(n-3)c}{m}, \text{ weil } a+b+c=k \\ h=\frac{(n-4)b}{m}, \text{ weil } a+b=h \\ g=\frac{(n-5)a}{m}, \text{ weil } a=g \end{array}\right\} \text{Demnach ist}$$

$$g+h+k+l+p+q=\frac{(n-5)a+(n-4)b+(n-3)c+(n-2)d+(n-1)e+nf}{m}$$

$$=\frac{n(a+b+c+d+e+f)-(5a+4b+3c+2d+e)}{m}$$

$$=\frac{nq-(g+h+k+l+p)}{m}. \text{ Folglich}$$

$$(m+1)(g+h+k+l+p)=nq-mq \text{ oder}$$

$$g+h+k+l+p=\frac{n-m}{m+1}q \text{ und}$$

$$g+h+k+l+p+q=\frac{(n+1)q}{m+1}.$$

Es verhält sich also auch in der $(m+1)$ ten Reihe S,

$$(g+h+k+l+p+q):(n+1)q=1:(m+1).$$

Wenn nämlich in der Kolumne P, die Buchstaben a, b, c, d, e, f; n Glieder vorstellen, so sind o, g, h, k, l, p, q in der Kolumne S, $(n+1)$ Glieder. Da nun der Satz für die erste Kolumne richtig ist, wie man sich leicht wird überzeugen können, da sie aus lauter Einheiten bestehet: so ist er auch für die zweite, und also auch für die dritte,

vierte, fünfte, und überhaupt für die mte Kolumne richtig. *W. Z. E.*

§. 10.*

ZUSATZ. Aus der Gleichung (§. 9.)

$$g+h+k+l+p=\frac{(n-m)q}{m+1}$$

folget, wenn man darinnen r für $(m+1)$ schreibt:

$$(g+h+k+l+p):(n-r+1)q=1:r$$

das heisst: die Summe von so viel Gliedern, als man will, irgend einer Kolumne r, vom ersten wirklichen Gliede 1 an gerechnet, verhält sich zu dem unmittelbar auf das letzte Glied (p) folgenden, und mit der Anzahl der Glieder $(n-r+1)$ gevielfältigten Gliede (q), wie $1:r$. Denn in dem Faktor $n-m$ oder $n-(r-1)$ zeigt m oder $r-1$ die Anzahl der Nullen an, welche dem Gliede 1 der rten Kolumne vorhergehen, und folglich ist $n-m$ d. i. $n-r+1$ die Anzahl der Glieder, weniger der Anzahl der Nullen.

Zum Beyspiel. Für Kolumne II ist $1+2+3+4:4.5=1:2$; für Kolumne III, $1+3+6+10:4.15=1:3$; und so weiter.

§. 11.

$$\text{Die } n\text{te Zahl (nach §. 4) der}\left\{\begin{array}{l}\text{ersten}\\ \text{zweiten}\\ \text{dritten}\\ \text{vierten}\\ \text{u. f. f.}\end{array}\right\}\text{Ordnung}$$

$$\text{verhält sich zu der eben so vielten Zahl der}\left\{\begin{array}{l}\text{zweiten}\\ \text{dritten}\\ \text{vierten}\\ \text{fünften}\\ \text{u. f. f.}\end{array}\right\}$$

$$\text{Ordnung, wie}\left\{\begin{array}{c}1\\ 2\\ 3\\ 4\\ \text{u. f. f.}\end{array}\right\}\text{zu}\left\{\begin{array}{l}n\\ n+1\\ n+2\\ n+3\\ \text{u. f. f.}\end{array}\right\}$$

Und überhaupt: die nte Zahl der mten Ordnung verhält sich zu der nten Zahl der $(m+1)$ten Ordnung, wie $m : (n+m-1)$.

§. 12.*

So verhält sich die dritte Zahl der zweiten Ordnung (d. i. 3) zu der dritten Zahl der dritten Ordnung (d. i. 6) $= 2 : (3+2-1) = 1 : 2$; desgleichen die sechste Zahl der dritten Ordnung (oder 21) zu der sechsten Zahl der vierten Ordnung (oder zu 56) $= 3 : (6+3-1) = 3 : 8$; u. s. w.

Denn es seien a, b, c, d, e, f; n Zahlen der mten Ordnung vom ersten Gliede (1) an gerechnet: so ist $(a+b+c+d+e) : (n-1) f = 1 : m$ (§. 10.) folglich

$$a+b+c+d+e = \frac{(n-1)f}{m}.$$

Demnach verhält sich die nte Zahl der mten Ordnung zu der nten Zahl der $(m+1)$ten Ordnung, oder

$$f : (a+b+c+d+e+f) = 1 : \left(1 + \frac{n-1}{m}\right)$$

$$= m : (m+n-1). \quad W. Z. E.$$

§. 13.

Aufgabe. *Den allgemeinen Ausdruk einer figurirten Zahl in m und n, wenn die Zahl der Ordnung $= m$, und des Gliedes $= n$ ist, oder: eine Formel für die nte m tangularzahl zu finden.*

Auflösung. Es sei

$$\left\{\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ .. \end{array}\right\} \text{die } n\text{te} \left\{\begin{array}{l} \text{natürliche} \\ \text{triangular-} \\ \text{quadrangular-} \\ \text{quinquangular-} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

Zahl: so verhält sich (§. 11)

$a : b = 2 : (n+1)$; es ist aber $a = n$, folglich $b = \frac{n(n+1)}{1 . 2}$;

$b : c = 3 : (n+2)$; folglich $c = b . \frac{n+2}{3} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 . 2 . 3}$;

$c:d=4:(n+3)$; folglich $d=c.\frac{n+3}{4}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$,
und ſo weiter.

§. 14.*

Wenn alſo überhaupt die *n*te $(m-1)$ tangularzahl iſt $q=\frac{n(n+1)\ldots(m+n-3)}{1.\ 2\ldots(m-2)}$, ſo iſt die *n*te *m* tangularzahl $r=q.\frac{m+n-2}{m-1}=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(m+n-3)(m+n-2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5\ldots(m-2)(m-1)}$, weil $q:r=(m-1):(n+m-2)$. Da nun

$1.2.3\ldots n(n+1)\ldots(m+n-2)=1.2.3\ldots(m-1)m\ldots(m+n-2)$

ſo hat man auch

$$\frac{n(n+1)\ldots(m+n-2)}{1.2.3\ldots(m-1)}=\frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n-3)(m+n-2)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6\ldots(n-2)(n-1)}$$

d. i. die *n*te *m* tangularzahl = der *m*ten *n* tangularzahl, und alſo den Satz (§. 8.) beſtätigt.

§. 15.*

Es iſt demnach

die *n*te beſtändige Zahl $=1$

die *n*te natürliche Zahl $=n$

die *n*te Triangularzahl $=\frac{n(n+1)}{1.\ 2}$

die *n*te Quadrangularzahl $=\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}$

die *n*te Zahl der fünften Ordn. $=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$

die *n*te Zahl d. ſechſten Ordn. $=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$

und ſo ferner. Ueberhaupt iſt die *n*te Zahl der *m*ten Ordnung $=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-2)}{1.\ 2.\ 3\ldots(m-1)}$ oder $\frac{m(m+1)\ldots(m+n-2)}{1.\ 2.\ 3\ldots(n-1)}$.

§. 16.*

AUFGABE. *Die Summe einer endlichen Reihe figurirter Zahlen von gleicher Ordnung zu finden.*

AUFLÖSUNG. Aus dem vorhergehenden ist klar, dass die Summe von n Zahlen einer gewissen Ordnung m, nichts anders ist, als die nte Zahl von der nächstfolgenden oder $(m+1)$ten Ordnung (§. 7.). Folglich ist die Summe

der n ersten beständigen Zahlen $= n$

der n ersten natürlichen Zahlen $= \frac{n(n+1)}{1.\ 2}$

der n ersten Triangularzahlen $= \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3}$

der n ersten Quadrangularzahlen $= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}$

der n ersten Zahlen d. 5ten Ordn. $= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}$.

§. 17.

Und überhaupt ist die Summe der n ersten Zahlen von der mten Ordnung, oder der n ersten mtangularzahlen $= \frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{1.\ 2.\ 3\ldots(m-1)m}$ oder $= \frac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n-1)}{1.\ 2.\ 3\ldots(n-1)}$.

Zum Beispiel. Die Summe der vier ersten Triangularzahlen $1+3+6+10$ ist $\frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3} = \frac{4.\ 5.\ 6}{1.\ 2.\ 3}$ oder 20; die Summe der 25 ersten Zahlen von der 8ten Ordnung $1 + 8 + 36 + 120 +$ u. s. f. ist $\frac{25.\ 26.\ 27.\ 28.\ 29.\ 30.\ 31.\ 32}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7.\ 8}$ oder 10 518 300; die Summe der 13 ersten Zahlen von der 12ten Ordnung ist $\frac{13.\ 14.}{\ldots}$

$$\frac{13 \cdot 14 \cdot 15 \ldots 24}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots 11 \cdot 12} \text{ oder } 2\,704\,156.$$

§. 18.

Wenn man die Einheit (1) nach und nach durch

$$\left\{\begin{array}{ll} 1-x & \text{oder } (1-x)^1 \\ 1-2x+x^2 & \text{oder } (1-x)^2 \\ 1-3x+3x^2-x^3 & \text{oder } (1-x)^3 \\ & (1-x^4) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ & (1-x)^m \end{array}\right\}$$

dividirt; so ist der Quotient die unendliche Reihe

$$\left\{\begin{array}{l} 1+x+x^2+x^3+x^4+ \text{ u. s. f.} \\ 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+ \text{ u. s. f.} \\ 1+3x+6x^2+10x^3+15x^4+ \text{ u. s. f.} \\ 1+4x+10x^2+20x^3+35x^4+ \text{ u. s. f.} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1+mx+\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}x^2+\frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3+ \text{ u. s. f.} \end{array}\right\}$$

Hieraus erhellet, dass überhaupt die unendliche Reihe $1+mx+\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}x^2+\frac{m(m+1)(m+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3+$ u. s. f. in infinit. $=\frac{1}{(1-x)^m}$;

Oder: vielfältigt man alle Zahlen bis ins unendliche von der mten Ordnung mit einer Grösse x, die kleiner als die Einheit ist, nämlich eine jede Zahl mit derjenigen Potenz von x, deren Grad mit dem Index (nach §. 4.) dieser Zahl, weniger 1 übereinkommt; so ist die Summe solcher unendlichen Glieder der Quotient, den man erhält, wenn man die Einheit durch die mte Potenz von $(1-x)$ dividirt.

§. 19.*

Die allgemeine Formel für die Summe der n ersten figurirten Zahlen von der mten Ordnung, wenn jede Zahl

auf die Potenz vom Grade $(p+1)$ erhoben wird, ist eine Funktion von m, n, und p.

§. 20.

Aufgabe. *Eine Formel für die Summe der n ersten m tangularzahlen in m, n und p zu finden, wenn jede auf die Potenz vom Grade (p+1) erhoben worden ist.*

Auflösung. *I. Die Summe der Potenzen der von 1 bis n in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlen zu finden.*

Der Kürze wegen bedeute

$$\int n, \int n^2, \int n^3, \int n^4, \ldots \int n^{p+1}$$

die Summe der n ersten natürlichen Zahlen, jede auf die Potenz vom Grade

$$1, 2, 3, 4, \ldots (p+1)$$

erhoben; und folglich

$$\left\{\begin{array}{l} \int\left(\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\right)^1, \int\left(\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\right)^2, \int\left(\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\right)^3 \text{etc.} \\ \int\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\right)^1, \int\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\right)^2, \int\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\right)^3, \text{etc.} \\ \int\left(\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\right)^1, \int\left(\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\right)^2, \text{etc.} \\ \text{u. s. f.} \end{array}\right\}$$

die Summe der n ersten $\left\{\begin{array}{l}\text{Triangular-}\\\text{Quadrangular-}\\\text{Quinquangular-}\\\text{u. s. f.}\end{array}\right\}$ zahlen, jede

auf die Potenz vom

1sten, 2ten, 3ten, u. s. f. Grade

erhoben. Man erhält demnach:

$$1)\ \int n = \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\ (\S.\ 13 = 17).$$

Nun ist $\int\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}$ oder $\int\frac{n^2}{2}+\int\frac{n}{2}$ oder $\int\frac{n^2}{2}+\frac{n(n+1)}{1\,.\,2\,.\,2}$

$= \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ (ebendaselbst); folglich

$$2)\ \int n^2 = -\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Nun ist $\int \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ oder $\int \frac{n^3}{6} + \int \frac{n^2}{2} + \int \frac{n}{3}$

oder $\int \frac{n^3}{6} + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n(n+1)}{6}$

$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$; folglich

$$3)\ \int n^3 = \frac{n(n+1)}{2} - 3 \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4},$$

Auf ähnliche Art findet man

$$4)\ \int n^4 = -\frac{n(n+1)}{2} + 7 \cdot \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$-6 \cdot \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5};$$

und so weiter. Setzt man der Kürze wegen

$$a = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$b = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},$$

$$c = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4},$$

$$d = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5},$$

und so ferner: so erhält man

$$\int n = +a$$
$$\int n^2 = -a + b$$
$$\int n^3 = +a - 3b + c$$

$$\int n^4 = -a + 7b - 6c + d$$
$$\int n^5 = +a - 15b + 25c - 10d + e$$
$$\int n^6 = -a + 31b - 90c + 65d - 15e + f$$

und ſo weiter. Alſo überhaupt

$$\int n^{p+1} = \pm \left\{ a - \frac{2^p - 1}{1} \cdot b + \frac{3^p - 2 \cdot 2^p + 1}{1 \cdot 2} \cdot c - \frac{4^p - 3 \cdot 3^p + 3 \cdot 2^p - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot d + \frac{5^p - 4 \cdot 4^p + 6 \cdot 3^p - 4 \cdot 2^p + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot e - \text{etc.} \right\}$$

Das Geſetz, welches dieſe Reihe beobachtet, iſt in die Augen fallend, ſie muſs das Zeichen + oder − erhalten, je nachdem der Exponent p eine gerade oder ungerade Zahl iſt, und es verſchwinden in ihr alle Glieder, die auf das $(p+1)$ te folgen.

§. 21. *

Es iſt alſo eine Formel für $\int n^{p+1}$ gefunden worden, welche die *Summe der Potenzen der von 1 bis n in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlen* angiebt, wenn man darinnen anſtatt n und p die gehörigen Werthe ſchreibt. Man findet nämlich aus derſelben die Summe

$\int n^1$, $\int n^2$, $\int n^3$, $\int n^4$, $\int n^5$, $\int n^6$, ...

für $p =$

0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

die entwikelte Reihe bekömmt das Zeichen

+, −, +, −, +, −, ...

und es verſchwinden in ihr das

2te etc. 3te etc. 4te etc. 5te etc. 6te etc. 7te etc.

alle folgende Glieder.

Zum Beiſpiel. Die Summe von 1000 Gliedern der 10ten Potenzreihe zu finden.

Hier iſt $p + 1 = 10$, $n = 1000$, folglich

$$\int 1000^{10} = -\left(a - \frac{2^9-1}{1} \cdot b + \frac{3^9-2\cdot 2^9+1}{1\cdot 2} \cdot c - \ldots - k\right)$$

$$= -a + 511 \cdot b - 9330 \cdot c + 34105 \cdot d - 42525 \cdot e + 22827 \cdot f$$
$$-5880 \cdot g + 750 \cdot h - 45 \cdot i + k$$

Nun ist

$$a = \frac{1000 \cdot 1001}{2} = 500\,500$$

$$b = \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 1002}{3} = 334\,334\,000$$

$$c = \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 1002 \cdot 1003}{4} = 251\,502\,751\,500$$

$$d = \frac{1000 \ldots 1004}{5} = 202\,007\,010\,004\,800$$

$$e = \frac{1000 \ldots 1005}{6} = 169\,180\,870\,879\,020\,000$$

$f = 145\,882\,248\,089\,394\,960\,000$
$g = 128\,540\,495\,847\,768\,134\,130\,000$
$h = 115\,172\,284\,279\,600\,248\,180\,480\,000$
$i = 104\,587\,951\,354\,304\,985\,372\,693\,888\,000$
$k = 96\,030\,755\,334\,407\,304\,751\,291\,660\,800\,000$

Vielfältigt man diese gefundenen Werthe für a, b, c, ... k mit den dazu gehörigen Koëfficienten -1, $+511$, -9330, ... und addirt die gefundenen Produkte, so ist die Summe der positiven Glieder

96 117 137 877 677 971 523 292 831 098 000

und der negativen

4 707 213 636 253 738 099 050 906 855 500

Zieht man nun diese von jener ab, so bleibt der gesuchte Werth für $\int 1000^{10}$ übrig:

91 409 924 241 424 243 424 241 924 242 500.

§. 22.

II. Die Summe der Potenzen der n ersten Triangularzahlen zu finden.

Es ist $\int \frac{n(n+1)}{1\,.\,2} = \frac{b}{2}$;

$$\int \left(\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\right)^2 = \frac{2b - 4c + d}{4};$$

$$\int \left(\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\right)^3 = \frac{4b - 32c + 38d - 12e + f}{8};$$

u. s. f. Und überhaupt die Reihe für

$$\int \left(\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\right)^{p+1} = \frac{1}{1\,.\,2^p}.\left\{ b - \frac{3^p - 1}{1} c + \frac{6^p - 2\,.\,3^p + 1}{1\,.\,2} d \right.$$

$$\left. - \frac{10^p - 3\,.\,6^p + 3\,.\,3^p - 1}{1\,.\,2\,.\,3}.e + \frac{15^p - 4\,.\,10^p + 6\,.\,6^p - 4\,.\,3^p + 1}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}.f - \text{etc.} \right\}$$

worinnen alle Glieder, die auf das $(2p+1)$te Glied folgen, verschwinden.

III. Die Summe der Potenzen der n ersten Quadrangularzahlen zu finden.

Es ist

$$\int \frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3} = + \frac{c}{6};$$

$$\int \left(\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\right)^2 = - \frac{6c - 18d + 9e - f}{36};$$

u. s. w. Und überhaupt

$$\int \left(\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\right)^{p+1} = \pm \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3^p}.\left\{ c - \frac{4^p - 1}{1}.\,d + \right.$$

$$\left. \frac{10^p - 2\,.\,4^p + 1}{1\,.\,2}.e - \frac{20^p - 3\,.\,10^p + 3\,.\,4^p - 1}{1\,.\,2\,.\,3}.f + \text{etc.} \right\}$$

$+$ oder $-$, je nachdem p gerade oder ungerade ist, auch verschwinden alle auf das $(3p+1)$te Glied folgende Glieder.

§. 23. *

IV. *Die Summe der Potenzen der n ersten mtangularzahlen zu finden.*

a) In der Formel für die Summe der Potenzen der *n* ersten *natürlichen* Zahlen (§. 20. I) enthalten die Zähler der Koëfficienten von *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, . . . als Glieder, deren Anzahl bei jedem folgenden Zähler um eins grösser wird, die *natürlichen Zahlen*, jede auf die Potenz *p* erhoben, und diese Potenzen haben zu Faktoren nach und nach die *Binomialkoëfficienten.* Nämlich der Zähler des Koëfficienten von *b* besteht aus den Gliedern $1 \mid$ und 2^p

die zu Faktoren haben $1^p \mid 1$

der Zähler des Koëfficienten von *c* besteht aus

den Gliedern $3^p \mid 2^p \mid 1^p$

die zu Faktoren haben $1 \mid 2 \mid 1$

der Zähler des Koëfficienten von *d* besteht aus

den Gliedern $4^p \mid 3^p \mid 2^p \mid 1^p$

die zu Faktoren haben $1 \mid 3 \mid 3 \mid 1$

der Zähler des Koëfficienten von *e* besteht aus

den Gliedern $5^p \mid 4^p \mid 3^p \mid 2^p \mid 1^p$

die zu Faktoren haben $1 \mid 4 \mid 6 \mid 4 \mid 1$; u. s. w.

Das erste Glied jedes Zählers hat allemal +, das zweite −, und eben so wechseln die Zeichen bei den folgenden ab. Endlich ist der Nenner des Koëfficienten von *b*, = 1; von *c* das Produkt 1.2; von *d* das Produkt 1.2.3; von *e* das Produkt 1.2.3.4; u. s. f.

b) In der Formel für die Summe der Potenzen der *n* ersten *Triangularzahlen* (§. 22. II) enthalten die Glieder der Zähler der Koëfficienten von *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, u. s. f. auf ähnliche Art wie vorhin, die *Triangularzahlen*, jede auf die *p*te Potenz erhoben, und haben auch auf die Art wie vorher, zu Faktoren die *Binomialkoëfficienten.* Die Zeichen der Glieder jedes Zählers wechseln wie vorhin mit + und − ab, und der Nenner des Koëfficienten

von *c* ist 1 | von *e*, 1.2.3
— *d* — 1.2 | — *f*, 1.2.3.4 u. s. f.

c) In der Formel für die Summe der Potenzen der n ersten *Quadrangularzahlen* (§. 22. III) enthalten die Glieder der Zähler der Koëfficienten von $d, e, f, g, h, \ldots\ldots$ nach und nach die *Quadrangularzahlen*, jede auf die Potenz vom Grade p erhoben, und diese haben zu Faktoren nach und nach die *Binomialkoëfficienten*. Die Zeichen wechseln ab, und der Nenner des Koëfficienten

von d ist 1
— e — 1.2
— f — $1.2.3$
— g — $1.2.3.4$
u. s. f.

d) Allemal hat das erste Glied jeder Reihe $+$, das zweite $-$, und so fort haben die folgenden Glieder abwechselnd $+$ und $-$, wenn man nicht auf das Zeichen der Reihe Rüksicht nimmt, welches bei den Reihen für die Summe der Potenzen der n ersten *natürlichen* und *Quadrangularzahlen* für jeden besondern Fall durch die Zahl p bestimmt wird, da hingegen die Reihe für die Summe der n ersten *Triangularzahlen* allemal $+$ hat, was auch p für eine Zahl sein mag. Auch hat die Reihe

$\int n^{p+1}$ zum Faktor $\frac{1}{1}$ und zum ersten Gliede a

$\int\left(\frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\right)^{p+1}$ —— $\frac{1}{1.2}$ ———— b

$\int\left(\frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\right)^{p+1}$ — $\frac{1}{1.2.3}$ ———— c

u. s. f.

e) Hieraus ($a:d$) läßt sich überhaupt auf folgendes allgemeine Gesetz schliessen: In der Formel für die Summe der n ersten mtangularzahlen, jede auf die Potenz vom Grade $(p+1)$ erhoben, oder in

$$\int\left(\frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+m-2)}{1.\;\;2.\;\;3.\ldots\ldots(m-1)}\right)^{p+1}$$

enthalten die Glieder der Zähler der Koëfficienten von $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+m)}{m+1}$ der β heiſse

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+m+1)}{m+2}=\gamma$$

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+m+2)}{m+3}=\delta$$

u. ſ. f.

nach und nach die *m tangularzahlen*, jede auf die Potenz vom Grade p erhoben, und dieſe haben zu Faktoren die *Binomialkoëfficienten*; die Nenner dieſer Koëfficienten von β, γ, δ, u. ſ. f. ſind nach einander $1, 1.2, 1.2.3$, u. ſ. f. und die Glieder im Zähler haben vom erſten Gliede an abwechſelnd $+$, $-$ zum Zeichen. Nämlich der Koëfficient

von β iſt $\frac{m^p-1}{1}$;

von γ, $\frac{\left\{\frac{m(m+1)}{1.2}\right\}^p-2.m^p+1}{1.2}$;

von δ, $\frac{\left\{\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}\right\}^p-3.\left\{\frac{m(m+1)}{1.2}\right\}^p+3m^p-1}{1.2.3}$;

u. ſ. f.

Die ganze Reihe iſt in den Bruch $\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}$ gevielfältigt, und hat zum erſten Gliede $+\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}{m}$ welches α heiſsen mag.

Das Zeichen des zweiten Gliedes iſt $-$, und eben ſo wechſeln bei den folgenden Gliedern $+$ und $-$ ab. Endlich wird das Zeichen der ganzen Reihe durch p beſtimmt;

sie hat nämlich, wenn m eine gerade Zahl bedeutet, ein bejahtes oder ein verneintes Zeichen, je nachdem p gerade oder ungerade ist; wenn aber m eine ungerade Zahl bedeutet, allemal ein bejahtes Zeichen, es mag p eine gerade oder ungerade Zahl sein.

§. 24.

Demnach ist die *Summe der n ersten mtangularzahlen, jede auf die Potenz vom Grade $(p+1)$ erhoben,* folgende:

$$\int\left(\frac{n(n+1)(n+2)\ldots\ldots(n+m-2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\ldots(m-1)}\right)^{p+1}=$$

$$\pm\frac{1}{1\cdot2\ldots\ldots(m-1)}\cdot\left\{\alpha-\frac{\overline{m-1}^{\,p}}{1}\cdot\beta\right.$$

$$\mp\frac{\left(\frac{m(m+1)}{1\cdot2}\right)^{p}-2\cdot\overline{m+1}^{\,p}}{1\cdot2}\cdot\gamma$$

$$-\frac{\left(\frac{m(m+1)(m+2)}{1\cdot2\cdot3}\right)^{p}-3\left(\frac{m(m+1)}{1\cdot2}\right)^{p}+3\cdot\overline{m-1}^{\,p}}{1\cdot2\cdot3}\cdot\delta$$

$$\mp\frac{\left(\frac{m\ldots\ldots(m+3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\right)^{p}-4\cdot\left(\frac{m\ldots(m+2)}{1\cdot2\cdot3}\right)^{p}+6\cdot\left\{\frac{m(m+1)}{1\cdot2}\right\}^{p}-4\cdot\overline{m+1}^{\,p}}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot\varepsilon$$

$-$ u. s. f. } Alle Glieder dieser Reihe, welche auf das $(mp-p+1)$te Glied folgen, verschwinden.

Es ist also eine allgemeine Formel in m, n, p für die Summe der n ersten mtangularzahlen, jede auf die Potenz vom Grade $p+1$ erhoben, gefunden worden.

§. 25.*

Zum Beispiel. Die Summe der Quadrate der zwanzig ersten Triangularzahlen zu finden.

Hier ist $m=3$, $n=20$, $p+1=2$, folglich $mp-p+1=3$,

und die Reihe

$$\int\left(\frac{n(n+1)}{1.2}\right)^2 = +\frac{1}{1.2}\cdot\left\{b-\frac{3-1}{1}.c+\frac{\frac{3.4}{1.2}-2.3+1}{1\ .\ 2}.d\right\}=$$

$\frac{2b-4c+d}{4}$, welche, $n=20$ gesetzt, die verlangte Summe giebt $1^2+3^2+6^2+10^2+15^2+21^2+28^2+....+210^2=$
$\frac{2.3080-4.53130+1020096}{4}=203434.$

§. 26.*

Zusatz. Setzt man in der allgemeinen Formel (§. 24.) $n+r$ anstatt n, so bekömmt man die Summe der Potenzen der $(n+r)$ ersten mtangularzahlen, oder

$$\int\left(\frac{(n+r)(n+r+1)....(n+r+m-2)}{1\ .\ 2\\ (m-1)}\right)^{p+1}$$

und wenn man hievon $\int\left(\frac{n(n+1)(n+2)....(n+m-2)}{1\ .\ 2\\ (m-1)}\right)^{p+1}$ subtrahirt, so erhält man zur Differenz

$$\int\left(\frac{(n+r)....(n+r+m-2)}{1.2....(m-1)}\right)^{p+1}-\int\left(\frac{n(n+1)....(n+m-2)}{1.2....(m-1)}\right)^{p+1}$$

das ist die Summe der Potenzen von $n+r-n$ oder r mtangularzahlen, von der $(n+1)$ ten mtangularzahl an gerechnet.

Kapitel IV.*

Die Erwartung.

§. 1.

1) Gesetzt, es verberge jemand in der einen Hand a Dukaten, und in der andern b; zwei Personen sollen jede, die eine was in der einen, und die andere was in der an-

dern Hand ist, herausnehmen; so ist die ganze Summe $= (a+b)$ Dukaten. Da aber beide ein gleiches Recht haben, entweder a oder b zu bekommen; so muss ein jeder von ihnen, wenn sie sich vor dem Spiele darein theilen wollen, die Hälfte der ganzen Summe erhalten. Folglich ist eines jeden Spielers *Werth seiner Erwartung* oder *jetzige Werth des Preises* $= \frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}.(a+b)$ Dukaten.

2) Ist $b=0$; so ist der Werth eines jeden seiner Erwartung, oder der jetzige Werth des Preises $= \frac{1}{2}\, a$.

3) Sind in einem Becher 3 Kugeln: a, b, c; sollen 3 Personen, jede eine blindlings herausnehmen, und soll diejenige die a zieht, die Summe α; diejenige die b zieht, β; und die c zieht, γ bekommen; so ist eines jeden Werth seiner Erwartung $= \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} = \frac{1}{3}.(\alpha+\beta+\gamma)$. Und so weiter.

4) Ist $\gamma=0$, so ist eines jeden Werth seiner Erwartung $= \frac{1}{3}(\alpha+\beta)$; ist auch $\beta=0$, so ist ebenderselbe $= \frac{1}{3}\alpha$.

5) Sind also in einem Becher m Kugeln, 1 weisse und $(m-1)$ schwarze, sollen m Personen, jede eine blindlings herausnehmen, und soll diejenige welche die weisse Kugel zieht, die Summe S bekommen; so ist der jetzige Werth des Preises $= \frac{S}{m} = \frac{1}{m}.S$.

6) Ist die Anzahl der günstigen Fälle $= n$ anstatt 1, also der widrigen $= m-n$; so ist die ganze Summe $= n.S$; demnach eines jeden Spielers Werth seiner Erwartung $= \frac{n.S}{m} = \frac{n}{m}.S$.

7) *Zum Beispiel.* Es seien 3 $(=n)$ weisse, und 6 $(=m-n)$ schwarze Kugeln, der Preis sechs

Dukaten (=S); ſo iſt der Werth meiner Erwartung = $\frac{3}{6+3} . 6 = \frac{1}{3} . 6 = 2$ Dukaten.

§. 2.

1) Iſt die Anzahl der Fälle, in denen man die Summe a bekommen kann, $=p$, die in denen man b bekommen kann, $=q$; ſo iſt der Werth der Erwartung $= \frac{1}{p+q} . (ap+bq)$. Denn geſetzt, es ſeien eben ſo viel Spieler als überhaupt Fälle vorhanden ſind, nämlich $p+q$, und eben ſo viel verſchloſſene Käſtchen, in p von dieſen, liege in jedem, die Summe a, und in q von ihnen, befinde ſich in jedem, die Summe b; ſo iſt die ganze Summe $= ap+bq$. Da aber der eine eben ſo viel Recht als der andere hat, entweder die Summe a, oder die Summe b, zu bekommen; ſo muſs man die ganze Summe durch die Anzahl der Spieler, oder aller Fälle dividiren. Demnach iſt der Werth der Erwartung eines jeden $= \frac{ap+bq}{p+q} = \frac{1}{p+q} . (ap+bq)$.

2) Iſt $p=q$; ſo bekömmt man den Werth eines jeden ſeiner Erwartung $= \frac{1}{2} . (a+b)$.

3) Iſt $p=2q$; ſo iſt ſein jetziger Werth $= \frac{2aq+bq}{3q} = \frac{1}{3} (2a+b)$.

4) Iſt $p=3q$; ſo iſt er $= \frac{1}{4} (3a+b)$.

5) Iſt $b=0$, ſo iſt ebenderſelbe $= \frac{1}{p+q} . a\,p$.

6) Giebt es $m\,p$ Fälle, in denen man die Summe a, und mq Fälle, in denen man b bekommen kann; ſo iſt der Werth der Erwartung eines jeden $= \frac{mpa+mqb}{mp+mq}$

$$= \frac{pa+qb}{p+q} = \frac{1}{p+q} \cdot (pa+qb).$$

7) Giebt es p Fälle, in denen man a; q Fälle, in denen man b; und r Fälle, in denen man c erhalten kann, u. s. w.; so ist der Werth eines jeden seiner Erwartung $= \frac{ap+bq+cr+\text{etc.}}{p+q+r+\text{etc.}} = \frac{1}{p+q+r+\text{etc.}} \cdot (ap+bq+cr+\text{etc.})$

8) Ist z. B. $b = 0$; so ist eben dieser Werth

$$= \frac{1}{p+q+r+\text{etc.}} \cdot (ap+cr+\text{etc.})$$

§. 3.

Aufgabe. *In der zwanzigsten Leipziger Lotterie waren überhaupt 16000 Loose; davon wurden in jeder der ersten vier Ziehungen 800 Nummern gegen 800 Gewinnste gezogen, so dass die herausgekommenen Nummern in den folgenden Klassen nicht weiter mitspielten; in der fünften und letzten Klasse wurden endlich die übrigen 12800 Nummern gegen 5234 Gewinnste und Prämien herausgezogen. In der ersten Klasse wurden auf 800 Gewinnste ausgezahlt 7610 Thaler; in der zweiten Klasse auf eben so viel Gewinnste 11200 Thlr.; in der dritten Klasse auf eben so viel Gewinnste 16220 Thlr.; in der vierten Klasse auf eben so viel Gewinnste 21220 Thlr.; endlich in der fünften oder letzten Klasse auf 5234 Gewinnste und Prämien 145350 Thlr. wie der beigefügte Lotterie-Plan angiebt. Man sucht die Einlage jeder Klasse, und den Werth eines Looses.*

Auflösung. I. In der ersten Klasse ist die Einlage

(§. 2. No. 7 u. 8) $= \frac{1}{16000} \cdot 7610$ Th. $=$ 11 Gr. $4\frac{49}{50}$ Pf.

In d. 2ten Kl. $= \frac{1}{16000-800} \cdot 11200$ „ $=$ 17 „ $8\frac{4}{19}$ „

— 3. — $= \frac{1}{16000-2 \cdot 800} \cdot 16220$ „ $=$ 1 Th. 3 „ $\frac{2}{3}$ „

$$\text{In d. 4ten Kl.} = \frac{1}{16000-3.800} . 21220 \text{ Th.} = 1 \text{ Th}, 13 \text{ Gr. } 5\tfrac{3}{8}\tfrac{1}{5} \text{ Pf.}$$

$$- 5. - = \frac{1}{16000-4.800} . 145350 \text{ ⸗ } = 11 \text{ ⸗ } 8 \text{ ⸗ } 6\tfrac{3}{8} \text{ ⸗}$$

II. Alſo iſt der rechtmäſsige Preis eines Looſes, die Summe dieſer einzelnen Einlagen, nämlich 15 Thaler 6 Gr. $1\frac{2}{6}\frac{1}{4}\frac{3}{6}\frac{3}{0}\frac{3}{0}$ Pf.

B I L A N Z.

Einnahme.

III) 1ſte Kl.	16000	Looſe à	11 Gr. $4\frac{4}{5}\frac{9}{0}$ Pf	betragen	7610 Th.
2.	⸗ 15200	⸗	17 ⸗ $8\frac{4}{19}$ ⸗	⸗	11200 ⸗
3.	⸗ 14400	⸗	1 Th. 3 ⸗ $\frac{2}{5}$ ⸗	⸗	16220 ⸗
4.	⸗ 13600	⸗	1 ⸗ 13 ⸗ $5\frac{3}{8}\frac{1}{5}$ ⸗	⸗	21220 ⸗
5.	⸗ 12800	⸗	11 ⸗ 8 ⸗ $6\frac{3}{8}$ ⸗	⸗	145350 ⸗
			15 Th. 6 Gr. $1\frac{2}{6}\frac{1}{4}\frac{3}{6}\frac{3}{0}\frac{3}{0}$ Pf.	⸗	201600 Th.

Ausgabe.

1ſte Klaſſe	800	Gewinnſte	betragen	7610 Th.
2te —	800	—	—	11200 ⸗
3te —	800	—	—	16220 ⸗
4te —	800	—	—	21220 ⸗
5te —	5234	Gewinnſte u. Prämien	—	145350 ⸗
	8434	Gewinnſte u. Prämien	—	201600 Th.

IV. Der wirkliche Preis eines Looſes bei der Leipziger Lotterie iſt aber 14 Thaler 12 Groſchen; alſo geringer als der rechtmäſsige (II). Dieſes läſst ſich folgendergeſtalt begreiflich machen. Je theurer die erſten Klaſſen ſind, deſto wohlfeiler wird das ganze Loos. In den erſtern Klaſſen wird alsdann mehr bezahlt, als vermöge der Rechtmäſsigkeit des Spiels bezahlt werden ſollte; welches erlaubt ſein kann, ſo lange als dieſes gegen die Gerechtigkeit nicht zu weit getrieben iſt, und darinnen zu viel in Vergleichung des Gewinnſtes zu bezahlen vorgeſchrieben worden. Es beträgt aber in der Leipziger

Lotterie die Einlage der ersten Klasse 1 Thaler anstatt 11 Groschen 4 $\frac{49}{50}$ Pfennig, und der niedrigste Gewinnst in dieser Klasse ist 4 Thlr.; also *kann* darinnen ein Loos mit 1 Thlr. bezahlt werden, da es wenigstens 3 Thlr. lucriret, und wenn es verspielet, der Inhaber desselben nicht nur die Hofnung hat, in einer der folgenden Klassen mehr zu gewinnen, sondern auch überhaupt weniger für die ganze Lotterie bezahlt, wenn er erst in der letzten Klasse herauskommt. Theilte man hingegen die Einlagen zu den einzelnen Klassen nicht ohngefähr auf solche Art ein, wie in der Leipziger Lotterie wirklich geschehen ist, sondern wie es die Rechmäfsigkeit des Spiels erfodert; so würden zwar anfänglich mehrere Loose abgesetzt, ohne Zweifel aber viele Loose der letzten Klasse nicht renovirt werden, wodurch die Kasse einen beträchtlichen Verlust erleiden könnte.

V. Rechnet man also Einsatz

für die 1ste Klasse nicht		11 Gr. 4 $\frac{49}{50}$ Pf.,	sondern	1 Th.	
—	2te	— — 17 = 8 $\frac{4}{19}$ =	—	2 =	
—	3te	— — 1 Th. 3 = $\frac{2}{5}$ =	—	3 =	
—	4te	— — 1 = 13 = 5 $\frac{31}{85}$ =	—	4 =	

so muss man in der fünften und letzten Klasse 4 Thlr. 12 Gr. einlegen. Denn die Lotterie nimmt alsdann

bei der ersten Klasse		16000 Th. ein,	
—	2ten —	30400 =	—
—	3ten —	43200 =	—
—	4ten —	54400 =	—
	Summe	144000 Thlr.	

also mangeln zur sämmtlichen Ausgabe noch 201600 – 144000 das ist 57600 Thlr. welche Summe die 12800 Interessenten der letzten Klasse insgesammt beitragen müssen, demnach giebt ein jeder $\frac{57600}{12800} = 4\frac{1}{2}$ Thlr. und die ganze Lotterie kostet 14 Thlr. 12 Gr.

VI. Sollen die Interessenten der fünften Klasse gar nichts bezahlen; so setze man den Einsatz zur ersten

Klasse

E

2
3
10
61
80

Klaſſe 2 Thlr. zur 2ten 3 Thlr. und zur 3ten 4 Thlr. Folglich beträgt der Einſatz zur vierten Klaſſe 4 Thlr. 21 Gr. $2\frac{2}{17}$ Pf. und die Lotterie koſtet zuſammen 13 Thlr. 21 Gr. $2\frac{2}{17}$ Pf.

BILANZ.

Einnahme.

VII)	1ſte Kl.	16000	Looſe à	2 Thlr.	—	32000 T.
	2te —	15200	—	3 =	—	45600 =
	3te —	14400	—	4 =	—	57600 =
	4te —	13600	—	4 = 21 G. $2\frac{2}{17}$ P.	—	66400 =
	5te —	12800	—	bezahlen nichts		
				13 T. 21 G. $2\frac{2}{17}$ Pf	—	201600 T.

Ausgabe.

wie in III.

VIII. Soll die Einlage jeder Klaſſe gleich viel betragen; ſo iſt, um ſie zu finden,

für die 1ſte Klaſſe $1 : x = 16000 : 16000 \,.\, x$
— 2te — $1 : x = 15200 : 15200 \,.\, x$
— 3te — $1 : x = 14400 : 14400 \,.\, x$
— 4te — $1 : x = 13600 : 13600 \,.\, x$
— 5te — $1 : x = 12800 : 12800 \,.\, x$

wo der Buchſtabe x die unbekannte Einlage jeder Klaſſe anzeigt. Folglich muſs die Summe der Einnahme in allen fünf Klaſſen:

$$16000.x + 15200.x + 14400.x + 13600.x + 12800.x$$

oder $(16000 + 15200 + 14400 + 13600 + 12800)\,x$

das iſt

$$72000 \,.\, x$$

ſo groſs, als die ganze Summe 201600 Thlr. ſein, welche die Lotterie auszahlt. Da man nun das 72000fache der Einlage jeder Klaſſe hat, ſo iſt auch das einfache bekannt, und alſo die geſuchte Einlage jeder Klaſſe $= \frac{201600}{72000} = 2\frac{4}{5}$ Thlr. Demnach koſtet alsdann die ganze Lotterie 14 Thlr.

BILANZ.

Einnahme.

IX)	1ste Klaſſe	16000 Looſe à	$2\frac{4}{5}$ Th.	—	44800 Th.	
	2te —	15200	—	$2\frac{4}{5}$ ſ	—	42560 ſ
	3te —	14400	—	$2\frac{4}{5}$ ſ	—	40320 ſ
	4te —	13600	—	$2\frac{4}{5}$ ſ	—	38030 ſ
	5te —	12800	—	$2\frac{4}{5}$ ſ	—	35840 ſ
				14 Th.	—	201600 Thlr.

Ausgabe.

wie in III.

X. Wollte man, daſs die Lotterie bei jeder Klaſſe gleich viel einnähme, ſo müſste die ganze Summe 201600 Thlr. durch die Anzahl der Klaſſen, nämlich durch 5 dividirt werden, welches das Kapital 40320 Thlr. gäbe. Alſo wäre für die

1. Kl.	16000 : 40320 = 1 :	*Einlage zur*	1. *Kl.* =	2 Th.	12 Gr.	$5\frac{19}{25}$ Pf.
2. ſ	15200 : 40320 = 1 :	—	— 2. ſ =	2 ſ	15 ſ	$7\frac{91}{95}$ ſ
3. ſ	14400 : 40320 = 1 :	—	— 3. ſ =	2 ſ	19 ſ	$2\frac{2}{5}$ ſ
4. ſ	13600 : 40320 = 1 :	—	— 4. ſ =	2 ſ	23 ſ	$1\frac{71}{85}$ ſ
5. ſ	12800 : 40320 = 1 :	—	— 5. ſ =	3 ſ	3 ſ	$7\frac{1}{5}$ ſ
und die Summe aller Einlagen oder ein Loos werth				14 Th.	2 Gr.	$1\frac{1237}{8075}$ Pf.

§. 4.

Zusätze. Für ein Loos ſind die Wahrſcheinlichkeiten in der Leipziger Lotterie zu gewinnen folgende, als:

in der 1ſten Klaſſe = $\frac{1}{20}$ *der Gewiſsheit*
— 2ten — = $\frac{1}{19}$ — —
— 3ten — = $\frac{1}{18}$ — —
— 4ten — = $\frac{1}{17}$ — —
— 5ten — = $\frac{5234}{12800}$ oder $\frac{1}{2\frac{583}{2617}}$

Man findet ſie nämlich für jede Klaſſe, wenn man die Anzahl der Nummern, die darinnen gewinnen, durch

die Menge der Spieler daselbst dividirt. Also ist für die erste Klasse die Wahrscheinlichkeit $\frac{800}{16000} = \frac{8}{160} = \frac{1}{20}$; u.s.w.

Die Wahrscheinlichkeit zu verlieren ist

für die 1ste Klasse $= 1 - \frac{1}{20} = \frac{19}{20} = \frac{1}{1\frac{1}{19}}$

— 2te — $= 1 - \frac{1}{19} = \frac{18}{19} = \frac{1}{1\frac{1}{18}}$

— 3te — $= 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18} = \frac{1}{1\frac{1}{17}}$

— 4te — $= 1 - \frac{1}{17} = \frac{16}{17} = \frac{1}{1\frac{1}{16}}$

— 5te — $= 1 - \frac{2617}{6400} = \frac{3783}{6400} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1\frac{1166}{2617}}}$

§. 5.

Kauft man zwei Loose; so ist für die 1ste Klasse die Anzahl der günstigen Fälle *) =

$$\frac{15998 \ldots\ldots (15998 - 798 + 1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots 798} = \frac{15998 \ldots\ldots 15201}{1 \cdot 2 \ldots\ldots 798}$$

und die Anzahl aller =

$$\frac{16000 \ldots\ldots 15201}{1 \cdot 2 \ldots\ldots 800};$$

folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Loose zugleich herauskommen, für die erste Klasse =

$$\frac{15998 \ldots\ldots 15201}{1 \cdot 2 \ldots\ldots 798} : \frac{16000 \ldots\ldots 15201}{1 \cdot 2 \ldots\ldots 800} =$$

$$\frac{799 \cdot 800}{16000 \cdot 15999} = \frac{799}{319980} = \frac{1}{400\frac{380}{799}};$$

und die entgegengesetzte, das heisst, diejenige Wahrscheinlichkeit, dass nicht beide Loose zugleich, d. i.

*) *Kästners* Analysis endlicher Grössen §. 740.

höchstens ein Loos (also auch gar keins) herauskommt,

$$= 1 - \frac{1}{400\frac{380}{799}} = \frac{319181}{319980} = \frac{1}{1\frac{799}{319181}}.$$ Für die zweite

Klasse ist die Anzahl der günstigen Fälle =

$$\frac{15198 \ldots\ldots (15198-798+1)}{1.2\ldots\ldots 798} = \frac{15198\ldots\ldots 14401}{1.2\ldots 798}$$

und die Anzahl aller =

$$\frac{15200 \ldots\ldots (15200-800+1)}{1.2\ldots\ldots 800} = \frac{15200\ldots\ldots 14401}{1.2\ldots 800};$$

also die Wahrscheinlichkeit, dass zwei bestimmte Nummern in der Ziehung der zweiten Klasse herauskommen =

$$\frac{15198\ldots 14401}{1.2\ldots 798} : \frac{15200\ldots 14401}{1.2\ldots 800} = \frac{799 \cdot 800}{15199 \cdot 15200} =$$

$$\frac{799}{288781} = \frac{1}{361\frac{342}{799}};$$ und die entgegengesetzte oder diejenige Wahrscheinlichkeit, dass höchstens eine derselben herauskommt =

$$1 - \frac{799}{288781} = \frac{287982}{288781} = \frac{1}{1\frac{799}{287982}}.$$

Auf eben die Art findet man für die dritte Klasse die Wahrscheinlichkeit, dass beide Nummern herauskommen werden =

$$\frac{14398\ldots 13601}{1.2\ldots 798} : \frac{14400\ldots 13601}{1.2\ldots 800} =$$

$$\frac{799 \cdot 800}{14399 \cdot 14400} = \frac{799}{259182} = \frac{1}{324\frac{306}{799}}$$

hievon ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit

$$= 1 - \frac{799}{259182} = \frac{258383}{259182} = \frac{1}{1\frac{799}{258383}};$$

und für die vierte Klasse

$$\frac{13598\ldots\ldots 12801}{1.2\ldots 798} : \frac{13600\ldots\ldots 12801}{1.2\ldots 800} =$$

$$\frac{799 \cdot 800}{13599 \cdot 13600} = \frac{799}{231183} = \frac{1}{289\frac{272}{799}}$$

die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit

$$1 - \frac{799}{231183} = \frac{230384}{231183} = \frac{1}{1\frac{799}{230384}};$$

endlich für die fünfte Klasse

$$\frac{12798 \ldots (12798 - 5232 + 1)}{1 \cdot 2 \ldots 5232} : \frac{12800 \ldots (12800 - 5234 + 1)}{1 \cdot 2 \ldots 5234}$$

$$= \frac{12798 \ldots 7567}{1 \cdot 2 \ldots 5232} \cdot \frac{1 \cdot 2 \ldots 5234}{12800 \ldots 7567} = \frac{5234 \cdot 5233}{12800 \cdot 12799} =$$

$$\frac{2617 \cdot 5233}{6400 \cdot 12799} = \frac{13\,694\,761}{81\,913\,600} = \frac{1}{3\frac{13439795}{13694761}},$$

die entgegengesetzte =

$$1 - \frac{13\,694\,761}{81\,913\,600} = \frac{68\,218\,839}{81\,913\,600} = \frac{1}{1\frac{13694761}{68218839}}.$$

§. 6.

Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass drei Loose herauskommen,

für die 1ste Klasse $\frac{800}{16000} \cdot \frac{799}{15999} \cdot \frac{798}{15998}$,

— 2te — $\frac{800}{15200} \cdot \frac{799}{15199} \cdot \frac{798}{15198}$,

— 3te — $\frac{800}{14400} \cdot \frac{799}{14399} \cdot \frac{798}{14398}$,

— 4te — $\frac{800}{13600} \cdot \frac{799}{13599} \cdot \frac{798}{13598}$,

— 5te — $\frac{5234}{12800} \cdot \frac{5233}{12799} \cdot \frac{5232}{12798}$.

Ferner ist die Wahrscheinlichkeit, dass vier Loose herauskommen, für die erste Klasse:

$$\frac{800}{16000} \cdot \frac{799}{15999} \cdot \frac{798}{15998} \cdot \frac{797}{15997};$$

und so weiter.

§. 7.

Ueberhaupt ist für n Loose, wenn q gezogen werden und m in dem Rade sind, die Wahrscheinlichkeit, daſs diese n Nummern in der nächsten Ziehung herauskommen werden =

$$\frac{(m-n)(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-n-(q-n)+1)}{1 \cdot 2 \ldots (q-n)} : \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-q+1)}{1 \cdot 2 \ldots q} \text{ oder}$$

$$\frac{(m-n)(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-q+1)}{1 \cdot 2 \ldots (q-n)} : \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-q+1)}{1 \cdot 2 \ldots q} =$$

$$\frac{q(q-1)(q-2)\ldots(q-n+2)(q-n+1)}{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+2)(m-n+1)}$$

Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit hievon, das heiſst diejenige, daſs höchstens $(n-1)$ Nummern herauskommen, ist =

$$1 - \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{m(m-1)\ldots(m-n+1)}.$$

§. 8.

Die Frage läſst sich noch allgemeiner folgendergestalt abfassen: *m Loose sind in dem Rade, q werden gezogen, n gekauft, davon just r herauskommen sollen. Was ist die Wahrscheinlichkeit dieser Begebenheit?*

Die Auflösung dieser Frage, nebst andern hieher gehörigen Untersuchungen, findet man in dem nächstfolgenden fünften Kapitel §. 14. und folgg.

Kapitel V.

Von der Wahrscheinlichkeit der Begebenheiten, wenn sich mehrere Fälle zugleich ereignen.

§. 1.

Es kann verlangt werden, daſs von der Anzahl aller Fälle = m, die von einer gegebenen Handlung, Bewegung, oder einem gegebenen Zuſtande abhängen, entweder nur ein einziger Fall, oder auch eine gewiſſe Anzahl q dieſer Fälle ſich ereignen ſoll.

Wenn man im erſten Falle eine Parthie von dieſen m Fällen beſonders auswählt, die Anzahl der ausgeſonderten Fälle = n ſetzt, und eine Begebenheit in der Ereigniſs eines der ausgeſonderten Fälle, es ſei welcher es wolle, beſtehet: ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit dieſer Begebenheit = $\frac{n}{m}$. Soll man z. B. aus einem Haufen von 32 Karten eines Piketſpiels blindlings und ohne zu wählen ein einziges Blatt, und zwar Tref ziehen: ſo ſind die Trefblätter an der Zahl = 8, die ausgeſonderten Karten; und die Wahrſcheinlichkeit der verlangten Begebenheit iſt = $\frac{8}{32}$ oder $\frac{1}{4}$.

Wenn man im zweiten Falle auch eine Parthie von den ſämmtlichen Fällen ausſondert, und die Zahl der ausgeſonderten Fälle = n iſt, hingegen eine Begebenheit auf dem Geſchehen der Menge r von den ausgeſonderten Fällen beruhet: oder wenn man z. B. aus den 32 Karten eines Piketſpiels 9 Stük blindlings ziehen ſoll, und unter dieſen 9 gezogenen Karten (juſt, oder wenigſtens, oder höchſtens) fünf Blätter aus Tref, ohne zu beſtimmen welche, ſich befinden ſollen: ſo iſt alsdann die Wahrſcheinlichkeit dieſer Begebenheit nicht mehr $\frac{n}{m}$ und nicht mehr $\frac{1}{4}$;

und der Gegenstand des gegenwärtigen Kapitels ist, diese Wahrscheinlichkeit zu bestimmen.

§. 2.

Lehrsatz. *Wenn m die Anzahl aller Fälle bedeutet, die von einer gegebenen Handlung, Bewegung, oder einem gegebenen Zustande abhängen; so ist die Zahl, welche anzeigt, auf wie viel gleich mögliche Arten q von diesen Fällen sich ereignen können* (oder die Menge aller Verbindungen nach q von diesen m Fällen) $\frac{m.(m-1)\ldots.(m-q+1)}{1\ldots\ldots q}$.*)

Beweis. Die Buchstaben a, b, c, d, f etc. mögen die m gegebenen Fälle andeuten: so ist

1) die Anzahl der Arten, auf welche ein einziger von diesen Fällen sich zutragen kann, $= m$ oder $\frac{m}{1}$.

2) Die Anzahl der Arten, auf welche zwei von den m gegebenen Fällen sich ereignen können, wird durch die Glieder folgender Tafel angegeben:

ab				
ac	*bc*			
ad	*bd*	*cd*		
af	*bf*	*cf*	*df*	
—	—	—	—	—

in welcher die Anzahl der Buchstaben m ist. Nun ist die Anzahl der Glieder $= 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots. + (m-4) + (m-3) + (m-2) + (m-1)$; folglich die Summe derselben (Kap. III. §. 16) $= \frac{m\,(m-1)}{1\,.\,2}$ die gesuchte Zahl der Verbindungen nach 2.

*) Wie aus des H. Hofr. *Kästners* Analysis endlicher Grössen §. 740 erhellet. Wer übrigens nicht eben viel Schärfe im Beweise verlangt, kann sich von der Richtigkeit dieses Satzes durch eine gemeine Induktion aus dem nun folgenden Beweise versichern.
Anm. des Uebers.

3) Die Anzahl der Arten, auf welche drei von den *m* gegebenen Fällen sich ereignen können, giebt folgende Tafel:

abc			
abd	*acd*		
abf	*acf*	*adf*	
—	—	—	—
	bcd		
	bcf	*bdf*	
	—	—	—
		cdf	
		—	—
			—

in welcher die Anzahl der Buchstaben *m* ist. Nun ist die Zahl der Glieder $= 1 + 3 + 6 + 10 + \ldots\ldots =$ der Summe der $(m-2)$ ersten Triangularzahlen, folglich ist (Kap. III. §. 16.) $\frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ die gesuchte Zahl der Verbindungen nach 3.

4)* Eben so giebt die Anzahl der Arten, auf welche vier von den *m* gegebenen Fällen sich ereignen können, folgende Tafel:

abcd		
abcf		
abdf	*acdf*	
—	—	—
	bcdf	
	—	—
		—

worin die Anzahl der Buchstaben $= m$ ist. Nun ist die Zahl der Glieder $= 1 + 4 + 10 +$ etc. die Summe von den $(m-3)$ ersten Gliedern der Reihe der Quadrangularzahlen; folglich die gesuchte Menge der Verbindungsarten $= \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$. Und so ferner wird die Menge aller Verbindungen von *m* Dingen nach 5, die

Summe von den $(m-4)$ ersten Gliedern der Reihe der Quinquangularzahlen; die Menge der Verbindungen nach 6 von m Dingen, die Summe von $(m-5)$ Gliedern der Reihe der Sexangularzahlen; u. s. w. folglich überhaupt die Anzahl der gleich möglichen Arten, auf welche die Zahl q von den m gegebenen Fällen sich zugleich ereignen kann, die Summe der $m-(q-1)=m-q+1$ ersten qtangularzahlen sein, $= \frac{m.(m-1)....(m-q+1)}{1.2....q}$.

W. Z. E.

§. 3.

Zum Beispiel. Aus einem Piketspiel von 32 gemischten Karten soll man blindlings und ohne zu wählen 15 Blätter herausziehen: man verlangt zu wissen, auf wie viel gleich mögliche Arten die Summe der gezogenen Karten zusammengesetzt sein kann. Dieses zu finden, setze man in der allgemeinen Formel $\frac{m....(m-q+1)}{1.2....q}$,

$m=32$, $q=15$; so verwandelt sie sich in $\frac{32....18}{1.2....15}$ $= 565\,722\,720$, welches die gesuchte Zahl ist.

§. 4.*

Aufgabe. *Zu finden, auf wie viel Arten man eine gegebene Menge von Fällen in eine gegebene Anzahl Theile zerlegen kann.*

Auflösung. Es sei m die gegebene Menge von Fällen, welche in mehrere, z. B. in n Theile eingetheilt werden sollen; der erste Theil enthalte q, der zweite q', der dritte q'', und so weiter, der $(n-1)$te $q^{n-''}$, und also der nte, $m-q-q'-q''-....-q^{n-''}$ von den m gegebenen Fällen: so ist die gesuchte Zahl

$$\frac{m(m-1)....(m-q+1)}{1.2....q} \cdot \frac{(m-q)(m-q-1)....(m-q-q'+1)}{1.2......q'} \times$$

$$\frac{(m-q-q')(m-q-q'-1)\ldots(m-q-q'-q''+1)}{1\;.\;2\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;q''}\times\ldots\ldots\times$$

$$\frac{(m-q-q'-q''-\ldots-q^{n-'''})\ldots(m-q-q'-q''-\ldots-q^{n-'''}-q^{n-''}+1)}{1\;.\;2\;.\;.\;.\;.\;.\;q^{n-''}}.$$

Im Beweiſe, der in den folgenden (§. 5. = §. 12.) enthalten iſt, kommen (§. 12. in der Anmerk.) noch drei andere, mit dieſer gleichgültige Formeln vor.

§. 5.

Die Menge aller Verbindungen nach q von m Dingen (§. 2.) zeigt auch an, auf wie viel Arten man m Fälle in zwei Theile, davon der eine Theil q, und der andere die übrigen $m-q$ Fälle enthält, eintheilen kann. Alſo iſt die Zahl, welche anzeigt, auf wie viel Arten man m Fälle in zwei Theile eintheilen kann, davon der eine q dieſer Fälle, und der andere die $(m-q)$ übrigen Fälle enthält, $\frac{m\ldots\ldots(m-q+1)}{1\;.\;2\;.\;.\;.\;.\;q}$, oder (weil die Menge der Verbindungen nach q von m Dingen, den nach $m-q$ von m Dingen gleich iſt, Kap. III. §. 14, 17.) $\frac{m\ldots\ldots(q+1)}{1.2\ldots\ldots(m-q)}$.

Zum Beiſpiel. Wenn zu wiſſen verlangt wird, auf wie viel Arten man aus den 32 Karten des Piketſpiels zwei Theile machen kann, davon der eine 27, und der andere Theil 5 Blätter enthält; ſo findet man die geſuchte Zahl:

$$\frac{32\ldots\ldots6}{1.2\ldots\ldots27} \text{ oder } \frac{32\ldots\ldots28}{1.2.3.4.5} = 201376.$$

§. 6.*

Eine gegebene Menge von Fällen, m, in 3 Theile, davon der erſte q, der zweite q', und alſo der dritte Theil $m-q-q'$ Fälle von m enthält, eintheilen, heiſst eben ſo viel, als aus dieſer gegebenen Menge m von Fällen erſtlich q, und alsdann aus den übrigen $(m-q)$ Fällen q' herausnehmen. Sollen alſo m Fälle in obgedachte

drei Theile eingetheilt werden; ſo wird die Zahl der möglichen Arten folgendergeſtalt gefunden.

§. 7.

Es heiſse m die Anzahl aller Fälle: ich ſage, wenn eine Anzahl q dieſer Fälle ſich zugleich ereignen ſoll; und hierauf q' von den $m-q$ übrigen Fällen ſich ebenfalls zugleich ereignen ſollen; ſo ſei die Zahl, welche angiebt, auf wie viel Arten ſolches geſchehen kann,

$$\frac{m \ldots\ldots (m-q+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots q} \cdot \frac{(m-q) \ldots\ldots (m-q-q'+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots q'}.$$

Denn die Zahl der Arten, auf welche die q Fälle, die ſich anfänglich ereignen ſollen, ſich ereignen können, iſt $\frac{m \ldots (m-q+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots q}$ (§. 2.); aber zu jeder von dieſen Arten können diejenigen q' Fälle, welche ſich nachher ereignen ſollen, auf $\frac{(m-q) \ldots (m-q-q'+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots q'}$ Arten ſich ereignen. Folglich iſt die Anzahl der Arten, auf welche die beſtimmte Begebenheit ſich zutragen kann, das Produkt:

$$\frac{m \ldots\ldots (m-q+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots q} \cdot \frac{(m-q)\,(m-q-1) \ldots\ldots (m-q-q'+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots q'} \; {}^{*)}$$

Zum Beiſpiel. Wenn man zu wiſſen verlangt, auf wie viel Arten aus einem Piketſpiel 12 Blätter, und hier-

*) Oder $= \frac{m \ldots\ldots (q+1)}{1 \,.\, 2 \ldots (m-q)} \cdot \frac{(m-q) \ldots\ldots (q'+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots (m-q-q')}$; weil die Menge der Verbindungen nach q' von $m-q$ Dingen mit der nach $m-q-q'$ von eben ſo viel Dingen einerlei iſt. Dieſe zweite Formel iſt aber eben ſo viel als $\frac{m\,(m-1) \ldots\ldots (q+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots q' \,.\, 1 \,.\, 2 \ldots\ldots (m-q-q')}$; und dieſer Ausdruk iſt wiederum $= \frac{m\,(m-1) \ldots\ldots (q'+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots q \,.\, 1 \,.\, 2 \ldots\ldots (m-q-q')}$; weil $m\,.\,(m-1) \ldots\ldots (q+1)\, q \ldots 2 \,.\, 1 = m\,(m-1) \ldots (q'+1)\, q' \ldots 2 \,.\, 1$.

Anmerk. d. Ueberſ.

auf aus den übrigen 20 Blättern 8 dazu genommen werden können: so setze man in der gefundenen Formel $m = 32$; $q = 12$; $q' = 8$; alsdann verwandelt sie sich in
$\frac{32\ldots21}{1.2\ldots12}\cdot\frac{20\ldots13}{1.2\ldots8} = 28\,443\,124\,004\,800$, welches die gesuchte Zahl ist.

§. 8.*

Also ist die Zahl, welche anzeigt, auf wie viel Arten man m Fälle in drei Theile eintheilen kann, davon der erste q dieser Fälle, der andere q', und der dritte die $m-q-q'$ übrigen Fälle enthält,

$$= \frac{m\ldots(m-q+1)}{1.2\ldots q}\cdot\frac{(m-q)\ldots(m-q-q'+1)}{1.2\ldots q'}$$

oder $\frac{m\ldots(q+1)}{1.2\ldots(m-q)}\cdot\frac{(m-q)\ldots(q'+1)}{1.2\ldots(m-q-q')}$

oder $\frac{m(m-1)\ldots(q+1)}{1.2\ldots q'.1.2\ldots(m-q-q')}$

oder endlich $\frac{m(m-1)\ldots(q'+1)}{1.2\ldots q.1.2\ldots(m-q-q')}$.

Zum Beispiel. Verlangt man zu wissen, auf wie viel Arten aus einem Piketspiel 12 Blätter, und alsdann aus den übrig gebliebenen 20 Blättern, noch 11 dazu genommen werden können, oder auf wie viel Arten 32 Karten in drei Theile, den ersten aus 12, den 2ten aus 11, und den 3ten aus 9 Blättern bestehend, eingetheilt werden können; so setzt man

$m=32$, $q=$	12	12	11	11	9	9
$q'=$	11	9	12	9	12	11
$m-q-q'=$	9	11	9	12	11	12

welches die gesuchte Zahl giebt: $\frac{32\ldots21}{1.2\ldots12}\cdot\frac{20\ldots10}{1.2\ldots11}$

$$= \frac{32\ldots13}{1.2\ldots20}\cdot\frac{20\ldots12}{1.2\ldots9} = \frac{32\ldots13}{1.2\ldots11.1.2\ldots9} = \frac{32\ldots12}{1.2\ldots12.1.2\ldots9}.$$

§. 9. *

Soll demnach eine gegebene Menge m von Fällen in vier Theile eingetheilt werden: so dafs der 1ste, q; der 2te, q'; der 3te, q''; und also der 4te, $m-q-q'-q''$ Fälle enthält; so ist die gesuchte Zahl:

$$\frac{m\ldots(m-q+1)}{1\ldots\ldots q}\cdot\frac{(m-q)\ldots(m-q-q'+1)}{1.2\ldots\ldots q'}\times\frac{(m-q-q')\ldots(m-q-q'-q''+1)}{1.2\ldots\ldots q''}$$

oder

$$\frac{m\ldots(q+1)}{1.2\ldots(m-q)}\cdot\frac{(m-q)\ldots(q'+1)}{1.2\ldots(m-q-q')}\cdot\frac{(m-q-q')\ldots(q''+1)}{1.2\ldots(m-q-q'-q'')}=$$

$$\frac{m\,(m-1)\ldots\ldots(q+1)}{1.2\ldots q'.1.2\ldots q''.1.2\ldots(m-q-q'-q'')}=$$

$$\frac{m\,(m-1)\ldots\ldots(q''+1)}{1.2\ldots q.1.2\ldots q'.1.2\ldots(m-q-q'-q'')}.$$

§. 10.*

Sollen m Dinge in 5 Theile: $q, q', q'', q''', m-q-q'-q''-q'''$, getheilt werden; so ist die Anzahl der Arten:

$$\frac{m\ldots\ldots(m-q+1)}{1.2\ldots\ldots q}\cdot\frac{(m-q)\ldots(m-q-q'+1)}{1.2\ldots\ldots q'}\times$$

$$\frac{(m-q-q')\ldots\ldots(m-q-q'-q''+1)}{1.2\ldots\ldots q''}\times$$

$$\frac{(m-q-q'-q'')\ldots(m-q-q'-q''-q'''+1)}{1.2\ldots\ldots q'''}$$

oder

$$\frac{m\ldots\ldots(q+1)}{1.2\ldots\ldots(m-q)}\cdot\frac{(m-q)\ldots\ldots(q'+1)}{1.2\ldots\ldots(m-q-q')}\times$$

$$\frac{(m-q-q')\ldots(q''+1)}{1.2\ldots(m-q-q'-q'')}\cdot\frac{(m-q-q'-q'')\ldots(q'''+1)}{1.2\ldots(m-q-q'-q''-q''')}=$$

$$\frac{m.(m-1)\ldots\ldots(q+1)}{1.2\ldots q'.1.2\ldots q''.1.2\ldots q'''.1.2\ldots(m-q-q'-q''-q''')}=$$

$$\frac{m\,.\,(m-1)\,\ldots\,(q'''+1)}{1.2\ldots q.1.2\ldots q'.1.2\ldots q''.1.2\ldots(m-q-q'-q''-q''')}$$

§. 11.*

Für m Dinge in 6 Theile: q, q', q'', q''', q^{IV}, $m-q-q'-q''-q'''-q^{IV}$, ist die gesuchte Zahl der Arten:

$$\frac{m\ldots(m-q+1)}{1.2\ldots q}\cdot\frac{(m-q)\ldots(m-q-q'+1)}{1.2\ldots q'}\times$$

$$\frac{(m-q-q')\ldots(m-q-q'-q''+1)}{1.2\ldots q''}\times$$

$$\frac{(m-q-q'-q'')\ldots(m-q-q'-q''-q'''+1)}{1.2\ldots q'''}\times$$

$$\frac{(m-q-q'-q''-q''')\ldots(m-q-q'-q''-q'''-q^{IV}+1)}{1.2\ldots q^{IV}}\text{ oder}$$

$$\frac{m\ldots(q+1)}{1.2\ldots(m-q)}\cdot\frac{(m-q)\ldots(q'+1)}{1.2\ldots(m-q-q')}\cdot\frac{(m-q-q')\ldots(q''+1)}{1.2\ldots(m-q-q'-q'')}\times$$

$$\frac{(m-q-q'-q'')\ldots(q'''+1)}{1.2\ldots(m-q-q'-q''-q''')}\cdot\frac{(m-q-q'-q''-q''')\ldots(q^{IV}+1)}{1.2\ldots(m-q-q'-q''-q'''-q^{IV})}=$$

$$\frac{m\,(m-1)\ldots(q+1)}{1.2\ldots q'1.2\ldots q''.1.2\ldots q'''1.2\ldots q^{IV}.1.2\ldots(m-q-q'-q''-q'''-q^{IV})}=$$

$$\frac{m\,(m-1)\ldots(q^{IV}+1)}{1.2\ldots q.1.2\ldots q'.1.2\ldots q''.1.2\ldots q'''.1.2\ldots(m-q-q'-q''-q'''-q^{IV})}.$$

§. 12.

Wenn also überhaupt m die Anzahl aller Fälle ist, davon q zuerst, und alsdann q' von den übrigen $m-q$, hierauf q'' von den übrig gebliebenen $m-q-q'$, dann q''' von den noch übrigen $m-q-q'-q''$, und so weiter, sich ereignen sollen; oder: wenn m Fälle in mehrere Theile eingetheilet werden sollen, davon der erste q, der zweite q', der dritte q'', der vierte q''', und so ferner, Fälle enthält: so ist die Anzahl der gleich möglichen Arten,

auf welche diese Wirkung statt haben kann:

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(m-q+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots q}\times$$

$$\frac{(m-q)(m-q-1)\ldots.(m-q-q'+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots q'}\times$$

$$\frac{(m-q-q')(m-q-q'-1)\ldots.(m-q-q'-q''+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots q''}\times$$

$$\frac{(m-q-q'-q'')(m-q-q'-q''-1)\ldots.(m-q-q'-q''-q'''+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots q'''}\times \text{etc.*)}$$

Zum Beispiel. 1. Die 32 Piketkarten sollen unter die beiden Spieler und Kaufkarte ausgetheilt; oder, welches einerlei ist, in drei Theile, nämlich in zwei Theile von 12 und einen Theil von 8 Karten, zerlegt werden: man

*) Oder $\frac{m.(m-1)\ldots\ldots(q+1)}{1\,.\,2\ldots.(m-q)}\times$

$$\frac{(m-q)(m-q-1)\ldots.(q'+1)}{1\,.\,2\ldots.(m-q-q')}\times$$

$$\frac{(m-q-q')(m-q-q'-1)\ldots\ldots(q''+1)}{1\,.\,2\ldots.(m-q-q'-q'')}\times$$

$$\frac{(m-q-q'-q'')(m-q-q'-q''-1)\ldots.(q'''+1)}{1\,.\,2\ldots.(m-q-q'-q''-q''')}\times \text{etc.}$$

Es ist nämlich allemal ein Faktor weniger als Theile von m gemacht werden sollen. Bei n Theilen von m giebt es also $n-1$ Faktoren, deren Gesetz in Ansehung der Aufeinanderfolge deutlich in die Augen fällt. Oder noch anders für n Theile von m:

$$\frac{m(m-1)\ldots.(q+1)}{1.2..q'.1.2..q''..1.2..q^{n'''}.1.2..q^{n-''}.1.2..(m-q-q'-q''-q'''-q^{v}-..-q^{n-''})}=$$

$$\frac{m(m-1)\ldots.(q^{n-''}+1)}{1.2\ldots q.1.2\ldots q'\ldots.1.2\ldots q^{n-IV}.1.2\ldots q^{n-'''}.1.2\ldots(m-q-q'-q''-\ldots-q^{n-''})}.$$

Anm. des Uebers.

man fragt, auf wie viel mögliche Arten sich diese Theile zusammensetzen lassen?

Hier ist $m=32$, $n=3$, $q=12$, $q^{n-''}=q^{'''-''}=q'=12$; folglich $m-q-q'=8$ gesetzt, die gesuchte Zahl:

$$\frac{m\ldots(m-q+1)}{1.2\ldots q}\cdot\frac{(m-q)\ldots(m-q-q'+1)}{1.2\ldots q'}=\frac{32\ldots21}{1.2\ldots12}\cdot\frac{20\ldots9}{1.2\ldots12}=$$

$$\frac{32\ldots21}{1.2\ldots12}\cdot\frac{20\ldots13}{1.2\ldots8}=28\,443\,124\,004\,800;$$ oder $q=12$, $q'=8$, also $m-q-q'=12$ gesetzt: $\frac{32\ldots21}{1.2\ldots12}\cdot\frac{20\ldots13}{1.2\ldots8}$ wie vorher; oder auch $q=8$, $q'=12$, also $m-q-q'=12$, $\frac{32\ldots25}{1.2\ldots8}\cdot\frac{24\ldots13}{1.2\ldots12}=$

$$\frac{32\ldots21}{1.2\ldots12}\cdot\frac{20\ldots13}{1.2\ldots8}.$$

2) Will man wissen, auf wie viel Arten die 52 Kartenblätter des ganzen Spiels unter die vier Spieler im Wisk ausgetheilt werden können, oder welches einerlei ist, auf wie viel Arten man diese 52 Karten in vier gleiche Theile, davon jeder 13 Karten enthält, eintheilen kann; so setze man in der gefundenen Formel $m=52$, $q=13=q'=q''=m-q-q'-q''$; welches die gesuchte Zahl giebt $=\frac{52\ldots40}{12\ldots13}\cdot\frac{39\ldots27}{1.2\ldots13}\cdot\frac{26\ldots14}{1.2\ldots13}=$

$$\frac{52\ldots14}{1.2\ldots39}\cdot\frac{39\ldots14}{1.2\ldots26}\cdot\frac{26\ldots14}{1.2\ldots13}=8565126197851151797861440000.$$

§. 13.*

Sollen m Fälle in n gleiche Theile eingetheilt werden; so geben die vorigen Formeln die Anzahl der Arten, auf welche dieses geschehen kann

$$\frac{m\,(m-1)\ldots(q+1)}{(1.2\ldots q)^{n-1}}$$

Es ist demnach für das zweite Beispiel in §. 12 die gesuchte Zahl $= \frac{52 . 51 \ldots . 14}{(1 . 2 \ldots 13)^3}$.

Für $m = n$ verwandelt sich aber die eben gefundene Formel in $m(m-1) \ldots . 3 . 2$.

§. 14.

Lehrsatz. *Es heisse m die Anzahl aller Fälle, wenn sich nur ein einziger Fall ereignen soll: und man setze nun*

1) dass eine Anzahl q von diesen Fällen sich gewiss ereigne;

2) dass man aus der ganzen Anzahl von m Fällen eine Parthie aussondere, und die Anzahl der ausgesonderten Fälle = n sei;

3) dass eine bestimmte Begebenheit in dem Geschehen just der Anzahl r von den ausgesonderten Fällen bestehe;

so wird die Wahrscheinlichkeit dieser Begebenheit sein

$$\frac{n(n-1) \ldots (n-r+1)}{1 . 2 \ldots r} \cdot \frac{(m-n)(m-n-1) \ldots (m-n-q+r+1)}{1 . 2 \ldots (q-r)} : \frac{m(m-1) \ldots (m-q+1)}{1 . 2 \ldots q}.$$

Beweis. 1) Von der Anzahl n der ausgesonderten Fälle kann sich die Anzahl r auf so viel Arten ereignen als die Zahl $\frac{n \ldots (n-r+1)}{1 . 2 \ldots r}$ angiebt (§. 2). Allein zu jeder von diesen Arten können sich $q-r$ aus der Anzahl $m-n$ der nicht ausgesonderten Fälle auf so viel Arten ereignen, als die Zahl $\frac{(m-n) \ldots (m-n-q+r+1)}{1 . 2 \ldots (q-r)}$ anzeigt. Folglich ist die Anzahl der gleich möglichen Arten die bestimmte Begebenheit zu erhalten, oder welches einerlei ist, die Menge derjenigen Fälle welche für diese Begebenheit günstig sind, das ist der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit, das Produkt

$$\frac{n \ldots (n-r+1)}{1.2 \ldots r} \cdot \frac{(m-n) \ldots (m-n-q+r+1)}{1 \,.\, 2 \ldots (q-r)}.$$

2) Von den sämmtlichen m Fällen können sich q auf so viel Arten ereignen, als durch folgende Zahl $\frac{m \ldots (m-q+1)}{1 \,.\, 2 \ldots q}$ angezeigt wird; folglich ist dieser Ausdruk die Menge aller möglichen Fälle, d. i. der Nenner der gesuchten Wahrscheinlichkeit.

3) Demnach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit (Kap. I. §. 10.)

$$\frac{n \ldots (n-r+1)}{1.2 \ldots r} \cdot \frac{(m-n) \ldots (m-n-q+r+1)}{1 \,.\, 2 \ldots (q-r)} : \frac{m \ldots (m-q+1)}{1 \,.\, 2 \ldots q}.$$

W. Z. E.

§. 15.*

Dieses ist zugleich die (Kap IV. §. 8.) versprochene Auflösung; die jezt vorkommenden n ausgesonderten Fälle sind nämlich die am a. O. gekauften n Loose.

Beispiele. 1) Man kauft in der 20sten Leipziger Lotterie drei Nummern, und will die Wahrscheinlichkeit wissen, dass just zwei davon, das heisst, weder mehr noch weniger als zwei, bei der ersten Ziehung herauskommen werden; so ist $m = 16000$, $q = 800$, $n = 3$, $r = 2$, also die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{3.2}{1.2} \cdot \frac{15997 \cdot 15996 \ldots 15200}{1 \,.\, 2 \ldots 798} : \frac{16000 \,.\, 15999 \ldots 15201}{1 \,.\, 2 \ldots 800}$$

$$= \frac{3 \cdot 15200 \,.\, 799 \,.\, 800}{16000 \cdot 15999 \cdot 15998} = \frac{910860}{127976001} = \frac{1}{140\frac{455601}{910860}}.$$

Für die zweite Klasse ist die Wahrscheinlichkeit dass von drei gekauften Loosen just zwei herauskommen werden

$$\frac{3 \cdot 14400 \cdot 799 \cdot 800}{15200 \cdot 15199 \cdot 15198} = \frac{17258400}{2194446819} = \frac{1}{127\frac{2630019}{17258400}}$$

und so weiter.

2) Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs im Zahlen-Lotto nur eine von 75 gekauften Nummern herauskommen wird? Hier iſt $m=90$, $q=5$, $n=75$ und $r=1$; alſo die geſuchte Wahrſcheinlichkeit

$$\frac{75}{1} \cdot \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} : \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} =$$

$$\frac{11375}{4883252} = \frac{1}{429\frac{3377}{11375}}.$$

3) Sollen die fünf gezogenen Nummern aus den 75 gekauften ſein; ſo iſt $q=r=5$, und die Wahrſcheinlichkeit in dieſem Falle $\frac{75 \cdot 74 \cdot 73 \cdot 72 \cdot 71}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{37 \cdot 5 \cdot 73 \cdot 71}{11 \cdot 89 \cdot 86 \cdot 29}$

$$= \frac{958855}{2441626} = \frac{1}{2\frac{523916}{958855}}.$$

§. 16.

Aus einem Piketſpiel werden blindlings 9 Karten zu ziehen erlaubt: wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs ſich unter ihnen fünf aus Pik befinden? Es iſt $m=32$, $q=9$, $n=8$, $r=5$; alſo $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} : \frac{32 \ldots 24}{1 \cdot 2 \ldots 9}$

$= \frac{12397}{584350}$ die geſuchte Wahrſcheinlichkeit.

§. 17.

Wenn in der allgemeinen Formel

$$\frac{n \ldots (n-r+1)}{1 \cdot 2 \ldots r} \cdot \frac{(m-n) \ldots (m-n-q+r+1)}{1 \cdot 2 \ldots (q-r)} : \frac{m \ldots (m-q+1)}{1 \cdot 2 \ldots q},$$

$r=0$ iſt; ſo bekömmt man

$$\frac{(m-n)(m-n-1) \ldots (m-n-q+1)}{1 \cdot 2 \ldots q} : \frac{m(m-1) \ldots (m-q+1)}{1 \cdot 2 \ldots q}$$

oder $\frac{(m-n)(m-n-1) \ldots (m-n-q+1)}{m(m-1) \ldots (m-q+1)}$

welches die Wahrscheinlichkeit ist, dass keiner von den n ausgesonderten Fällen sich ereignen wird.

§. 18.

Wenn man diese letztere Formel von der Einheit abziehet; so erhält man

$$1 - \frac{(m-n)\ldots(m-n-q+1)}{1\,.\,2\ldots q} : \frac{m\ldots(m-q+1)}{1\,.\,2\ldots q}$$ für die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens einer von den ausgesonderten Fällen sich zutragen wird. (Kap. I. §. 14.)

§. 19.

Zum Beispiel. 1) Die Wahrscheinlichkeit, dass im Zahlen-Lotto von 75 gekauften Nummern in der nächsten Ziehung keine einzige herauskommen wird, findet man, wenn man in der Formel

$$\frac{(m-n)\ldots(m-n-q+1)}{1\,.\,2\ldots q} : \frac{m\ldots(m-q+1)}{1\,.\,2\ldots q},$$

$m = 90$, $n = 75$, und $q = 5$ setzt; sie ist demnach

$$\frac{15\ldots11}{1.2\ldots5} : \frac{90\ldots86}{1.2\ldots5} = \frac{15\,.\,14\,.\,13\,.\,12\,.\,11}{90\,.\,89\,.\,88\,.\,87\,.\,86}\text{*)} = \frac{1001}{14649756};$$ Und

$$1 - \frac{1001}{14649756} = \frac{14648755}{14649756}$$ wird die Wahrscheinlichkeit sein, dass in der nächsten Ziehung (keine nicht, das heisst) wenigstens eine von den 75 gewählten Nummern herauskommen wird.

2)* Kauft man in der zwanzigsten Leipziger Lotterie ein Loos; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass dasselbe in der ersten Klasse nicht herauskommt

$$= \frac{(m-n)\ldots(m-n-q+1)}{m\ldots(m-q+1)} = \frac{15999\ldots15200}{16000\ldots15201} = \frac{15200}{16000} = \frac{19}{20}$$ (S. Kap. IV. §. 4.).

*) $= (1-\frac{75}{90})\cdot(1-\frac{75}{89})\cdot(1-\frac{75}{88})\cdot(1-\frac{75}{87})\cdot(1-\frac{75}{86})$. Man vergleiche Kap. II. §. 6. *Anm. des Uebers.*

3)* Die Wahrscheinlichkeit dafs von zwei bis zur letzten Klaffe übrig gebliebenen Nummern nicht eine einzige gewinnen wird, ift

$$= \frac{(m-2)\ldots(m-q-1)}{m(m-1)\ldots(m-q+1)} = \frac{(m-q)(m-q-1)}{m(m-1)}$$

$$= \left(1-\frac{q}{m}\right).\left(1-\frac{q}{m-1}\right) = \left(1-\frac{5234}{12800}\right).\left(1-\frac{5234}{12799}\right)$$

$$= \frac{5723679}{16382720};$$ Die Wahrfcheinlichkeit, dafs wenigftens eine davon gewinnen wird, ift $1 - \frac{5723679}{16382720} = \frac{10659041}{16382720}$.

4)* Die Wahrfcheinlichkeit dafs unter neun aus einem Piketfpiel blindlings herausgezogenen Karten fich auch nicht eine aus Pik befinden wird, ift =

$$\frac{24.23.22.21.20.19.18.17.16}{32.31.30.29.28.27.26.25.24} = \frac{81719}{1753050};$$ Alfo ift diejenige Wahrfcheinlichkeit, dafs wenigftens ein Pikblatt darunter fein wird

$$1 - \frac{81719}{1753050} = \frac{1671331}{1753050}.$$

5)* Ift in dem zuletzt gewählten Beifpiele $q = 25 (= 3.8+1)$; fo wird die gefuchte Wahrfcheinlichkeit $\frac{24\ldots.2.1.0}{32\ldots.24} = 0$, oder die Begebenheit unmöglich; alfo wird die Wahrfcheinlichkeit derjenigen Begebenheit, dafs wenigftens eine aus Pik darunter ift, $= 1 - 0 = 1$ oder Gewifsheit fein, wie auch ohne die Rechnung klar ift.

§. 20.

Setzt man in der allgemeinen Formel $r = n$; fo verwandelt fie fich in $\frac{(m-r)\ldots(m-q+1)}{1.2\ldots(q-r)} : \frac{m\ldots(m-q+1)}{1.2\ldots q}$

welches die Wahrscheinlichkeit ist, dass alle ausgesonderten Fälle sich ereignen werden. (Man sehe Kap. IV. §. 7.)

Zum Beispiel. 1. Im Zahlen-Lotto kauft jemand drei Nummern: um die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass sie in der nächsten Ziehung herauskommen werden, setze man in der jetzt gefundenen Formel $m=90$, $q=5$, $r=3$; so verwandelt sie sich in $\frac{87\cdot 86}{1\cdot 2} : \frac{90\ldots\ldots 86}{1\cdot 2\ldots\ldots 5}$ *) $= \frac{1}{11748}$ welches die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist **)

2) * Kauft man sechs Nummern in der zwanzigsten Leipziger Lotterie; so ist die Wahrscheinlichkeit dass sie in der nächsten Ziehung gewinnen werden,

$$\frac{q\,(q-1)\,(q-2)\,(q-3)\,(q-4)\,(q-5)}{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,(m-4)\,(m-5)},$$

Z. B. für die Ziehung der dritten Klasse ist $m=14400$, $q=800$, also die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{800\cdot 799\cdot 798\cdot 797\cdot 796\cdot 795}{14400\cdot 14399\cdot 14398\cdot 14397\cdot 14396\cdot 14395}.$$

3) * Für eine Nummer ist die Wahrscheinlichkeit dass sie in der nächsten Ziehung herauskommen wird $=\frac{q}{m}$. Für die erste Klasse der Leipziger Lotterie ist sie

*) $= \frac{5}{90}\cdot\frac{4}{89}\cdot\frac{3}{88}$ welches mit Kap. II. §. 6. übereinkommt.

Anm. des Uebers.

**) Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit hievon ist diejenige, dass höchstens zwei Nummern herauskommen werden, $=1-\frac{5}{90}\cdot\frac{4}{89}\cdot\frac{3}{88}=\frac{11747}{11748}$; oder nach Kap. II. §. 3. und 6, $=\frac{5}{90}\cdot\frac{4}{89}\cdot(1-\frac{3}{88})+\frac{5}{90}\cdot(1-\frac{4}{89})\cdot\frac{3}{88}+(1-\frac{5}{90})\cdot\frac{4}{89}\cdot\frac{3}{88}+\frac{5}{90}\cdot(1-\frac{4}{89})\cdot(1-\frac{3}{88})+(1-\frac{5}{90})\cdot\frac{4}{89}\cdot(1-\frac{3}{88})+(1-\frac{5}{90})\cdot(1-\frac{4}{89})\cdot\frac{3}{88}+(1-\frac{5}{90})\cdot(1-\frac{4}{89})\cdot(1-\frac{3}{88})$ welches ebenfalls die vorige Zahl giebt; nur ist bei diesem Verfahren mühsam das Abzählen der einzelnen Fälle, wobei man sich sehr leicht verrechnen kann.

Anm. des Uebers.

$= \frac{800}{16000} = \frac{1}{20}$, Kap. IV. §. 4. Für das Zahlen-Lotto iſt dieſe Wahrſcheinlichkeit $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$. Für zwei Nummern iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs ſie alle beide herauskommen werden $= \frac{q(q-1)}{m(m-1)}$; alſo für die erſte Klaſſe der zwanzigſten Leipziger Lotterie $= \frac{800 \cdot 799}{16000 \cdot 15999}$ $= \frac{1}{20} \cdot \frac{799}{15999}$, welches mit Kap. IV. §. 5. übereinkommt.

4)* Die Wahrſcheinlichkeit, daſs unter neun aus einem Piketſpiel blindlings gezogenen Karten ſich alle Pik befinden werden, iſt $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25} = \frac{1}{1168700}$. Diejenige Wahrſcheinlichkeit, daſs nicht alle Pik, daſs alſo höchſtens 7 Pik ſich darunter befinden werden, iſt $1 - \frac{1}{1168700} = \frac{1168699}{1168700}$.

§. 21.

Wenn $n = q$ iſt; ſo verwandelt ſich die allgemeine Formel in $\frac{q(q-1)\ldots(q-r+1)}{1 \cdot 2 \ldots r} \cdot \frac{(m-q)(m-q-1)\ldots(m-2q+r+1)}{1 \cdot 2 \ldots (q-r)} : \frac{m(m-1)\ldots(m-q+1)}{1 \cdot 2 \ldots q}$.*)

*) Welches die Wahrſcheinlichkeit iſt, daſs, wenn ſo viel Fälle ausgeſondert worden, als Fälle ſich ereignen ſollen, juſt r von den ausgeſonderten Fällen ſich ereignen werden. Eben dieſe Wahrſcheinlichkeit läſst ſich aber auch folgendergeſtalt ausdrüken:

$$\frac{q^2(q-1)^2(q-2)^2\ldots(q-r+1)^2}{1 \cdot 2 \ldots r} \cdot \frac{(m-q)(m-q-1)\ldots(m-2q+r+1)}{m(m-1)\ldots(m-q+1)}.$$

Anm. d. Uebers.

§. 22.*

Beiſpiele. 1. Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs im Lotto bei der nächſten Ziehung von fünf gekauften Nummern juſt drei herauskommen werden? Hier iſt $m=90$, $q=5$, $r=3$; alſo die geſuchte Wahrſcheinlichkeit

$$\frac{5^2 \cdot 4^2 \cdot 3^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{85 \cdot 84}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{2975}{3662439} = \frac{1}{1231\frac{214}{2975}}.$$

2. Man wähle in einem Piketſpiel eine Farbe; ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs unter acht blindlings herausgezogenen Karten ſich juſt fünf von dieſer Farbe befinden werden:

$$\frac{(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4)^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{24 \cdot 23 \cdot 22}{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}.$$

§. 23.

Wenn $r=q=n$; ſo verwandelt ſich die allgemeine Formel in

$$1 : \frac{m(m-1) \ldots\ldots (m-q+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots\ldots q} \text{ oder}$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot \ldots\ldots q}{m \cdot (m-1) \ldots\ldots (m-q+1)}.$$

Zum Beiſpiel. 1) Es beſetze jemand im Lottoſpiel fünf Nummern; ſo bekömmt man die Wahrſcheinlichkeit, daſs ſie insgeſammt bei der nächſten Ziehung herauskommen werden, wenn man in der eben gefundenen Formel $m=90$, $q=5$ ſetzt; es iſt alſo dieſe Wahrſcheinlichkeit $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{1}{43949268}$; Und $1 - \frac{1}{43949268}$ $= \frac{43949267}{43949268}$ wird die Wahrſcheinlichkeit ſein, daſs höchſtens vier davon herauskommen werden.

2)* Sollen aus einem Piketſpiel acht Karten gezogen werden, und alle aus Pik ſein; ſo iſt die Wahrſchein-

lichkeit dieser Begebenheit $\frac{1.2.3.4.5.6.7.8}{32.31.30.29.28.27.26.25}$ $= \frac{1}{10518300}$. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens sieben aus Pik darunter sind, $1 - \frac{1}{10518300}$ $= \frac{10518299}{10518300}$.

§. 24.*

Wenn in der allgemeinen Formel $q = r$ ist; so bekömmt man die Wahrscheinlichkeit, dass die herauskommenden alle von den ausgesonderten Fällen sind,

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-q+1)}{m(m-1)\ldots(m-q+1)}.$$

Hiernach wäre die Wahrscheinlichkeit der Begebenheit

§.15. Num. 3. $\frac{75 \cdot 74 \cdot 73 \cdot 72 \cdot 71}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}$ wie am a. O.

§. 25.

Ist $q = r = 1$; so verwandelt sich die allgemeine Formel in $\frac{n}{m}$, welches die Wahrscheinlichkeit ist, wenn ein einziger von den ausgesonderten Fällen sich ereignen soll.

§. 26.*

Zum Beispiel. Kauft man n Nummern in einer Lotterie, die aus m Nummern besteht; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass man beim ersten Zuge just auf eine von den gekauften Nummern trift, $= \frac{n}{m}$.

1) Für die 20ste Leipziger Lotterie ist die Wahrscheinlichkeit, dass mein Loos in der ersten Klasse zu allererst herauskommt $\frac{1}{16000}$, und die dass es nicht zu-

erst herauskommt, $= 1 - \frac{1}{16000} = \frac{15999}{16000}$; die Wahrscheinlichkeit, dass eins von meinen beiden Loosen in derselben zuerst herauskommen wird, ist $= \frac{2}{16000} = \frac{1}{8000}$; und so weiter, wenn ich überhaupt n Loose gekauft habe, die Wahrscheinlichkeit, dass eins davon zu allererst herauskommen wird, $= \frac{n}{16000}$; Die Wahrscheinlichkeit, dass mein Loos in der zweiten Klasse zuerst herauskommt, ist $= \frac{1}{15200}$, und wenn ich der Besitzer von zwei Loosen bin, dass eins von denselben in der zweiten Klasse beim ersten Zuge herauskommen wird $= \frac{2}{15200} = \frac{1}{7600}$; und so ferner.

2) Hat man in der Leipziger Lotterie zwei Loose gekauft; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide hinter einander zu allererst herauskommen werden, aus §. 23, für die erste Klasse $= \frac{1 \cdot 2}{16000 \cdot 15999}$ oder $\frac{2}{16000} \cdot \frac{1}{15999}$; für die zweite Klasse $\frac{2}{15200} \cdot \frac{1}{15199}$; überhaupt für n Loose der ersten Klasse

$$= \frac{n}{16000} \cdot \frac{n-1}{15999} \cdot \frac{n-2}{15998} \cdots \frac{1}{16000-n+1};$$

und allgemein für irgend eine Klasse:

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{n-1}{m-1} \cdot \frac{n-2}{m-2} \cdot \frac{n-3}{m-3} \cdots \frac{2}{m-n+2} \cdot \frac{1}{m-n+1}.$$

3) Soll man aus einem Piketspiel blindlings eine Karte ziehen; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese aus Pik oder Tref sein wird

$= \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. (Man vergleiche §. 1)

4) Kauft man im Zahlen-Lotto 75 Nummern; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine von denselben sogleich beim ersten Zuge herauskommen wird $= \frac{75}{90} = \frac{15}{18} = \frac{1}{1\frac{1}{5}}$.

§. 27.

AUFGABE. *Wenn alles übrige bleibt wie in §. 14; die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass wenigstens r Fälle von den n ausgesonderten Fällen sich ereignen werden.*

AUFLÖSUNG. 1) Man setze nach und nach in dem Zähler am a. O. anstatt r alle ganze Zahlen von $n, n-1, \ldots$ bis $r+3$, $r+2$, $r+1$, r; so wird die Summe der auf diese Weise erhaltenen einzelnen Produkte der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit sein.

2) Der Nenner ist mit dem a. a. O. einerlei.

3) Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\Big\{ {}^{n}A . \frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-q+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots (q-n)} +$$

$$ {}^{n}B . \frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-q)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots (q-n+1)} +$$

$$ {}^{n}C . \frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-q-1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots (q-n+2)} +$$

$$ {}^{n}D . \frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-q-2)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots (q-n+3)} + \ldots$$

$$+ {}^{n}[R+2] . \frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-q+r+3)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots (q-r-2)}$$

$$+ {}^{n}[R+1] . \frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-q+r+2)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots (q-r-1)}$$

$$+ {}^{n}R . \frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-q+r+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots (q-r)} \Big\} :$$

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-q+1)}{1\;.\;2\;\ldots\ldots\;q}.*)\quad W.\,Z.\,F.$$

§. 28.*

Die allgemeine Formel im vorhergehenden §. 27. Num. 3 verwandelt ſich für $n<q$ in folgende:

$$\frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{m(m-1)\ldots(m-n+1)}.\Big\{{}^nA+{}^nB.\frac{m-q}{q-n+1}+{}^nC.\frac{(m-q).(m-q-1)}{(q-n+1)(q-n+2)}$$

$$+{}^nD.\frac{(m-q)(m-q-1)(m-q-2)}{(q-n+1)(q-n+2)(q-n+3)}+\ldots.$$

$$+{}^n[R+1].\frac{(m-q)\ldots.(m-n-q+r+2)}{(q-n+1)\ldots\ldots(q-r-1)}$$

$$+{}^nR.\frac{(m-q)(m-q-1)\ldots(m-n-q+r+1)}{(q-n+1)(q-n+2)\ldots(q-r)}\Big\}(=\odot);$$ und für

$n>q$, in $$\frac{n(n-1)\ldots.(n-q+1)}{m(m-1)\ldots.(m-q+1)}.\Big\{{}^qA+{}^qB.\frac{m-n}{n-q+1}$$

$$+{}^qC.\frac{(m-n)(m-n-1)}{(n-q+1)(n-q+2)}+\ldots\ldots..$$

$$+{}^qR.\frac{(m-n)\ldots\ldots(m-n-q+r+1)}{(n-q+1)\ldots\ldots.(n-r)}\Big\}(=\mathfrak{D}).$$

*) Wo die Buchſtaben ${}^nA$, ${}^nB$, ${}^nC$, ${}^nD$, ${}^nE$, ${}^nF$, ... ${}^n[R+2]$, ${}^n[R+1]$, ${}^nR$, den erſten $(=1)$ 2ten $(=n)$ 3ten, 4ten, 5ten, 6ten, ... $(r+3)$ten, $(r+2)$ten, $(r+1)$ten Binomialkoëfficienten der Potenz n andeuten. Z. B. ${}^nR$ bedeutet ſo viel als $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots.(n-r+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\ldots.\,r}$, desgleichen ${}^n[R+1]$ ſo viel als

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ldots..(n-(r+1)+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\,\ldots.\,(r+1)}$$ oder

$\frac{n(n-1)\ldots..(n-r)}{1\,.\,2\ldots\ldots(r+1)}$; ${}^nC$ ſo viel als $\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}$; und ſo weiter. *Anm. des Ueberſ.*

Beide Formeln wollen wir nun auf Beiſpiele anwenden.

§. 29.

Beiſpiel 1. Aus einem Piketſpiel von 32 Karten ſeien zehn Blätter blindlings und ohne zu wählen herauszuziehen erlaubt: wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs ſich unter dieſen zehn herausgezogenen wenigſtens fünf Koeur befinden werden? Hier iſt $m = 32$, $q = 10$, $n = 8$, $r = 5$, folglich die Reihe (⊙)

$$\frac{10.9.8.7.6.5.4.3}{32.31.30.29.28.27.26.25}\left(1+8.\frac{22}{3}+\frac{8.7}{1.2}.\frac{22.21}{3.4}+\frac{8.7.6}{1.2.3}.\frac{22.21.20}{3.4.5}\right)=\frac{5857}{140244}$$

die geſuchte Wahrſcheinlichkeit. Alſo wird diejenige Wahrſcheinlichkeit ſein, daſs nicht wenigſtens fünf Koeur, das heiſst, daſs höchſtens vier Koeur darunter ſind, $= 1 - \frac{5857}{140244} = \frac{134387}{140244}$.

§. 30.

Beiſpiel 2. Man wählt 75 von den 90 Lotto-Nummern, und verlangt die Gröſse der Wahrſcheinlichkeit zu wiſſen, daſs in der nächſten Ziehung wenigſtens drei von den ausgewählten Nummern zum Vorſchein kommen werden. Hier iſt $m = 90$, $n = 75$, $q = 5$, $r = 3$, alſo die geſuchte Wahrſcheinlichkeit (☽) $\frac{75.74.73.72.71}{90.89.88.87.86}$.

$$\left(1+5.\frac{15}{71}+\frac{5.4}{1.2}.\frac{15.14}{71.72}\right)=\frac{14193755}{14649756}.$$

§. 31.*

Für zwei Looſe in der letzten Klaſſe der 20ſten Leipziger Lotterie wird die Wahrſcheinlichkeit daſs wenigſtens eins davon gewinnt, gefunden, wenn man in der allgemeinen Formel (⊙ §. 28.) $m = 12800$, $q = 5234$, $n = 2$ und $r = 1$ ſetzt; alſo iſt die geſuchte Wahrſcheinlichkeit

$\frac{5234 \cdot 5233}{12800 \cdot 12799} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{12800 - 5234}{5234 - 1}\right) = \frac{10659041}{16382720}$ wie in §. 19. Num. 3. gefunden worden ist.

Auch erhält man die Wahrscheinlichkeit, daſs wenigstens eine von 75 gekauften Nummern des Lotto in der nächsten Ziehung herauskommen werde, wenn man in der allgemeinen Formel ☽ §. 28. $m = 90$, $n = 75$, $q = 5$, und $r = 1$ setzt, =

$$\frac{75 \ldots 71}{90 \ldots 86} \cdot \left\{1 + 5 \cdot \frac{15}{71} + \frac{5.4}{1.2} \cdot \frac{15.14}{71.72} + \frac{5.4.3}{1.2.3} \cdot \frac{15.14.13}{71.72.73} + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} \cdot \frac{15 \ldots 12}{71 \ldots 74}\right\}$$

$= \frac{1331705}{1331796}$. Man vergleiche §. 19. Num. 1.

Setzt man ferner in der allgemeinen Formel ⊙, $m = 32$, $q = 9$, $n = 8$, $r = 1$; so verwandelt sie sich in

$$\frac{9 \ldots 2}{32 \ldots 25} \cdot \left(1 + 8 \cdot \frac{23}{2} + \frac{8.7}{1.2} \cdot \frac{23.22}{2.3} + \frac{8.7.6}{1.2.3} \cdot \frac{23.22.21}{2.3.4} + \frac{8 \ldots 5}{1 \ldots 4} \cdot \frac{23 \ldots 20}{2 \ldots 5} + \frac{8 \ldots 4}{1 \ldots 5} \cdot \frac{23 \ldots 19}{2 \ldots 6} + \frac{8 \ldots 3}{1 \ldots 6} \cdot \frac{23 \ldots 18}{2 \ldots 7} + \frac{8 \ldots 2}{1 \ldots 7} \cdot \frac{23 \ldots 17}{2 \ldots 8}\right) = \frac{1671331}{1753050}$$

welches mit §. 19. Num. 4. übereinkommt.

§. 32.*

Wenn in den allgemeinen Formeln (⊙, ☾ §. 28) $n = q$ gesetzt wird; so verwandeln sie sich in

$$\frac{n(n-1) \ldots 2.1}{m(m-1) \ldots (m-n+1)} \cdot \left({}^nA + {}^nB \cdot \frac{m-n}{1} + {}^nC \frac{(m-n)(m-n-1)}{1.2} + {}^nD \frac{(m-n)(m-n-1)(m-n-2)}{1.2.3} + \ldots + {}^nR \cdot \frac{(m-n)(m-n-1) \ldots (m-2n+r+1)}{1.2 \ldots (n-r)}\right)$$

Zum Beiſpiel. Man beſetzt im Lotto 5 Nummern; Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs wenigſtens drei dieſer Nummern herauskommen werden? Hier iſt $m = 90$, n oder $q = 5$, $r = 3$, alſo die verlangte Wahrſcheinlichkeit

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} \cdot \left(1 + 5 \cdot \frac{85}{1} + 10 \cdot \frac{85 \cdot 84}{1 \cdot 2}\right) = \frac{6021}{7324878}.$$

Und diejenige Wahrſcheinlichkeit daſs höchſtens zwei von dieſen Nummern gewinnen, wird ſein

$$1 - \frac{6021}{7324878} = \frac{7318857}{7324878}.$$

§. 33.*

Man ſetze in der Formel des vorhergehenden §. 32 $r=1$; ſo bekömmt man den Ausdruck:

$$\frac{n \ldots\ldots 2 \cdot 1}{m \ldots (m-n+1)} \cdot \left({}^nA + {}^nB(m-n) + {}^nC \frac{(m-n)(m-n-1)}{1 \cdot 2} + \ldots\ldots + {}^nB \cdot \frac{(m-n) \ldots (m-2n+2)}{1 \cdot 2 \ldots (n-1)}\right)$$

welcher die Wahrſcheinlichkeit anzeigt, daſs von n ausgeſonderten Fällen wenigſtens einer unter den n herauskommenden iſt. Folglich iſt diejenige Wahrſcheinlichkeit, daſs ſich kein einziger Fall darunter befinden wird =

$$1 - \frac{n(n-1) \ldots 1}{m(m-1) \ldots (m-n+1)} \cdot \left({}^nA + {}^nB(m-n) + {}^nC \frac{(m-n(m-n-1)}{1 \cdot 2} + \ldots + {}^nB \frac{(m-n) \ldots (m-(n-1)2)}{1 \ldots (n-1)}\right).$$

Zum Beiſpiel. Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs im Lotto bei der nächſten Ziehung von fünf gewählten Nummern wenigſtens eine herauskommt?

Man ſetze $m = 90$ und $n = 5$, ſo erhält man die geſuchte Wahrſcheinlichkeit

$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} \cdot \left(1 + 5 \cdot 85 + 10 \cdot \frac{85 \cdot 84}{1 \cdot 2} + 10 \cdot \frac{85 \cdot 84 \cdot 83}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right.$$

+5·

$$+5 \cdot \frac{85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\Big) = \frac{1238639}{4883252}.$$

Und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit, nämlich diejenige, dass keine Nummer herauskommt, ist $= 1 - \frac{1238639}{4883252}$ oder $\frac{3644613}{4883252}$; welche die allgemeine Formel §. 21. unmittelbar giebt, wenn man darinnen $r = 0$ setzt. Diese Formel verwandelt sich alsdann in

$$\frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-2n+1)}{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)},$$

und giebt, die vorigen Werthe anstatt m und n gesetzt;

$$\frac{85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82 \cdot 81}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{3644613}{4883252}, \text{ wie vorhin.}$$

§. 34.*

Ist $r = n = q$, so verwandelt sich die allgemeine Formel in $\frac{n(n-1)\ldots\ldots 2 \cdot 1}{m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)}$, welche mit der in §. 23. übereinkommt.

Ist $r = n = q = 1$; so bekömmt man $\frac{1}{m}$.

Für $r = q$, verwandelt sich die Formel D (§. 28.) in

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-q+1)}{m(m-1)\ldots(m-q+1)} \text{ S. §. 24.}$$

Also für $r = q = 1$, in $\frac{n}{m}$.

Ist $n = r$, so giebt ⊙

$$\frac{q(q-1)\ldots\ldots(q-n+1)}{m(m-1)\ldots(m-n+1)} \text{ (§. 20.).}$$

Setzt man in ⊙ und D, $r = 1$; so bekömmt man die Wahrscheinlichkeit, dass von n ausgesonderten Fällen wenigstens ein Fall unter q herausgekommenen ist. Zieht man solche von der Einheit ab, so bekömmt man die

Wahrscheinlichkeit, dass von den n ausgesonderten Fällen keiner unter den q herauskommenden sich befindet. Man vergleiche §. 18. und 17.

Die Wahrscheinlichkeit suchen, dass sich wenigstens $o(=r)$ von n ausgesonderten Fällen unter q herausgekommenen befinden, heisst *Gewissheit* suchen. Addirt man nämlich zu der Formel in §. 18. die in §. 17, so bekömmt man 1.

§. 35.

Aufgabe. *Wenn alles übrige bleibt wie in §. 14; die Wahrscheinlichkeit zu finden, dass von den n ausgesonderten Fällen höchstens r Fälle sich ereignen werden.*

Auflösung. 1) Man setze in dem Zähler am a. O. anstatt r nach und nach alle ganze Zahlen von 0, 1, 2, ... bis $r-2$, $r-1$, r; so wird die Summe der solchergestalt erhaltenen Produkte der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit sein.

2) Der Nenner der gesuchten Wahrscheinlichkeit ist wie am a. O. $= \dfrac{m \ldots (m-q+1)}{1 \cdot 2 \ldots q}$.

3) Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\left({}^{n}A.\frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-q+1)}{1 \cdot 2 \ldots q} + {}^{n}B.\frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-q+2)}{1 \cdot 2 \ldots (q-1)} + {}^{n}C.\frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-q+3)}{1 \cdot 2 \ldots (q-2)} + \ldots + {}^{n}[R-1].\frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-q+r)}{1 \cdot 2 \ldots (q-r+1)} + {}^{n}R.\frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-q+r+1)}{1 \cdot 2 \ldots (q-r)} \right):$$

$$\frac{m.(m-1)\ldots.(m-q+1)}{1\;.\;2\;.\;.\;.\;.\;q};$$ *) W. Z. F.

§. 36.

Beispiel 1. Aus einem Piketspiel von 32 Karten ziehe man blindlings und ohne zu wählen 10 Blätter: Wie groſs ist die Wahrscheinlichkeit, daſs darunter höchstens vier Koeur sich befinden?

Man setze in der allgemeinen Formel des vorigen §. $m=32$, $q=10$, $n=8$, $r=4$, so verwandelt sie sich in

$$\frac{22.21.20.19.18.17.16.15}{32.31.30.29.28.27.26.25}.\left(1+8.\frac{10}{15}+\frac{8.7}{1.2}.\frac{10.9}{15.16}+\frac{8.7.6}{1.2.3}.\frac{10.9.8}{15.16.17}+\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}.\frac{10.9.8.7}{15.16.17.18}\right)=\frac{134387}{140244},$$

welches die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist. (Man sehe §.29)

§. 37.

Beispiel 2. Wie groſs ist die Wahrscheinlichkeit, daſs von 75 besetzten Lotto-Nummern in der nächsten Ziehung höchstens zwei herauskommen werden?

*) Welches so viel ist als die Reihe

$$\left({}^{n}A+{}^{n}B.\frac{q}{m-n-q+1}+{}^{n}C.\frac{q\,(q-1)}{(m-n-q+1).(m-n-q+2)}+\ldots\right.$$

$$+{}^{n}[R-1].\frac{q\ldots\ldots(q-r+2)}{(m-n-q+1)\ldots.(m-n-q+r-1)}$$

$$\left.+{}^{n}R.\frac{q\ldots\ldots(q-r+1)}{(m-n-q+1)\ldots.(m-n-q+r)}\right)$$

multiplicirt in

$$\frac{(m-q)\,(m-q-1)\ldots\ldots(m-n-q+1)}{m\;.\;(m-1)\ldots.(m-n+1)}$$

oder in $$\frac{(m-n).(m-n-1)\ldots.(m-n-q+1)}{m\,(m-1)\ldots.(m-q+1)}$$

je nachdem $n <$ *oder* $> q$ *ist.* *Anm. des Uebers.*

Hier ist $m=90$, $q=5$, $n=75$, $r=2$, also verwandelt sich die allgemeine Formel in

$$\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}\cdot\left(1+75\cdot\frac{5}{11}+\frac{75\cdot 74}{1\cdot 2}\cdot\frac{5\cdot 4}{11\cdot 12}\right)=\frac{456001}{14649756},$$

welches die verlangte Wahrscheinlichkeit ist. (Man vergleiche §. 30).

§. 38. *

Man kauft zwei Loose in der 20sten Leipziger Lotterie, und verlangt die Wahrscheinlichkeit zu wissen, dass höchstens eins davon in der ersten Klasse herauskommt.

In diesem Falle ist $m=16000$, $q=800$, $n=2$, $r=1$, also die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{15200\cdot 15199}{16000\cdot 15999}\cdot\left(1+2\cdot\frac{800}{15199}\right)=\frac{319181}{319980},$$

wie in Kap. IV. §. 5.

Für die zweite Klasse ist $m=15200$, das übrige bleibt, also die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens eine Nummer herauskommt:

$$\frac{14400\cdot 14399}{15200\cdot 15199}\cdot\left(1+2\cdot\frac{800}{14399}\right)=\frac{287982}{288781},$$

wie am a. O. u. s. f.

Die Wahrscheinlichkeit, dass im Lotto von 75 gewählten Nummern in der nächsten Ziehung höchstens vier herauskommen werden, ist

$$\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11}{90\cdot 89\cdot 88\cdot 87\cdot 86}\cdot\left(1+75\cdot\frac{5}{11}+\frac{75\cdot 74}{1\cdot 2}\cdot\frac{5\cdot 4}{11\cdot 12}+\frac{75\cdot 74\cdot 73}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\right.$$
$$\left.\frac{5\cdot 4\cdot 3}{11\cdot 12\cdot 13}+\frac{75\cdot 74\cdot 73\cdot 72}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{11\cdot 12\cdot 13\cdot 14}\right)=\frac{1482771}{2441626}$$

Man vergleiche §. 15. Beispiel 3.

Aus einem Piketspiel werden blindlings neun Blätter herauszunehmen erlaubt: Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich darunter höchstens sieben Koeur befinden?

Hier ist $m=32$, $q=9$, $n=8$, $r=7$, folglich die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{23\ldots 16}{32\ldots 25}\cdot\left(1+8\cdot\frac{9}{16}+\frac{8\cdot 7}{1\cdot 2}\cdot\frac{9\cdot 8}{16\cdot 17}+\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{9\cdot 8\cdot 7}{16\cdot 17\cdot 18}\right.$$
$$+\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{16\cdot 17\cdot 18\cdot 19}+\frac{8\ldots\ldots 4}{1\cdot 2\ldots\ldots 5}\cdot\frac{9\ldots 5}{16\ldots 20}+\frac{8\ldots 3}{1\cdot 2\ldots 6}\cdot$$
$$\left.\frac{9\ldots 4}{16\ldots 21}+\frac{8\ldots 2}{1\cdot 2\ldots 7}\cdot\frac{9\ldots 3}{16\ldots 22}\right)=\frac{1168699}{1168700},$$ wie in §. 20. Num. 4.

§. 39.*

Setzt man in der allgemeinen Formel §. 35, $r=1$; so verwandelt sie sich in

$$\frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-q+1)}{m(m-1)\ldots(m-q+1)}\left(1+\frac{n\,q}{m-n-q+1}\right)$$

oder $$\frac{(m-q)(m-q-1)\ldots(m-n-q+1)}{m(m-1)\ldots(m-n+1)}\left(1+\frac{n\,q}{m-n-q+1}\right),$$

je nachdem $n >$ oder $< q$ ist.

Zum Beispiel. Aus einem Piketspiel werden 4 Blätter blindlings herauszuziehen erlaubt; wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs darunter höchstens ein Koeurblatt ist?

Man setze in der erstern Formel $m=32$, $q=4$, $n=8$; so bekömmt man die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{24\cdot 23\cdot 22\cdot 21}{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29}\cdot\left(1+\frac{4\cdot 8}{21}\right)=\frac{13409}{17980}.$$ Also wird diejenige Wahrscheinlichkeit sein, dafs wenigstens zwei Koeur darunter sind, $=1-\frac{13409}{17980}=\frac{4571}{17980}$, wie man sie auch aus §. 28. D findet, wenn man $m=32$, $q=4$, $n=8$ und $r=2$ setzt.

§. 40.*

Wenn man in der allgemeinen Formel $n=q$ setzt; so erhält man

$$\frac{(m-n)(m-n-1),\ldots(m-2n+1)}{m(m-1)\ldots.(m-n+1)}.\left({}^nA+{}^nB.\frac{n}{m-2n+1}\right.$$

$$+{}^nC.\frac{n(n-1)}{(m-2n+1)(m-2n+2)}+\ldots\ldots$$

$$\left.\ldots\ldots\ldots+{}^nR.\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)}{(m-2n+1)\ldots.(m-2n+r)}\right)$$

welches die Wahrſcheinlichkeit anzeigt, daſs von n ausgeſonderten Fällen unter eben ſo viel herauskommenden höchſtens r vorhanden ſind.

Zum Beiſpiel. Die Wahrſcheinlichkeit, daſs in der nächſten Ziehung des Lotto von fünf Nummern höchſtens zwei gewinnen werden, iſt

$$\frac{85.84.83.82.81}{90.89.88.87.86}.\left(1+5.\frac{5}{81}+\frac{5.4}{1.2}.\frac{5.4}{81.82}\right)=\frac{7318857}{7324878},$$

wie in §. 32.

§. 41.*

Für $n=q$ und $r=1$, bekömmt man

$$\frac{(m-n)\ldots.(m-2n+1)}{m\ldots.(m-n+1)}.\left(1+\frac{n^2}{m-2n+1}\right)$$

welches die Wahrſcheinlichkeit iſt, daſs ſich höchſtens ein Fall von n ausgeſonderten Fällen unter eben ſo viel gezogenen befinden wird. Folglich iſt

$$1-\frac{(m-n)\ldots,(m-2n+1)}{m\ldots.(m-n+1)}.\left(1+\frac{n^2}{m-2n+1}\right)$$

die Wahrſcheinlichkeit, daſs ſich wenigſtens zwei Fälle von n ausgeſonderten Fällen unter eben ſo viel gezogenen befinden werden.

Zum Beiſpiel. Die Wahrſcheinlichkeit, daſs im Lottoſpiel höchſtens eine von fünf gewählten Nummern gewinnen wird, iſt

$$\frac{85\ldots.81}{90\ldots.86}\left(1+\frac{5^2}{81}\right)=\frac{21462721}{21974634};$$ und die, daſs da-

von wenigstens zwei gewinnen werden.

$$1 - \frac{21462721}{21974634} = \frac{511913}{21974634}.$$

§. 42.*

Setzt man in der allgemeinen Formel §. 35, $q=n=r$, oder in §. 40, $r=n$; so bekömmt man $1 =$

$$\frac{(n-n)\ldots.(m-2n+1)}{m\ldots.(m-n+1)} + n^2 . \frac{(m-n)\ldots.(m-2n+2)}{m\ldots.(m-n+1)}$$

$$+ \frac{n^2.(n-1)^2}{1 . 2} . \frac{(m-n)\ldots.(m-2n+3)}{m\ldots.(m-n+1)} +$$

$$\frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1 . 2 . 3} . \frac{(m-n)\ldots.(m-2n+4)}{m\ldots.(m-n+1)} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{n^2(n-1)^2\ldots.(n-r+1)^2}{1 . 2 \ldots . r} . \frac{(m-n)\ldots.(m-2n+r+1)}{m\ldots.(m-n+1)} + \text{etc.}$$

$+ \frac{n.(n-1)\ldots.2.1}{m\ldots.(m-n+1)}$. Dieser endlichen Reihe einzelne Glieder zeigen die Wahrscheinlichkeit an, dass von n ausgesonderten bei eben so viel herausgekommenen Fällen, just 0, 1, 2, 3....r,....n sich ereignen werden. Man vergleiche §. 33, 21, 23.

§. 43.*

In §. 35 $n=q=r=1$ oder $n=1$ in §. 41, 42 gesetzt, erhält man $\frac{m-1}{m} . \left(1 + \frac{1}{m-1}\right) = 1$. Ferner in §. 35. $r=0$ gesetzt, verwandelt sich die allgemeine Formel in die §. 17.

Kapitel VI.

Von der Wahrscheinlichkeit der Begebenheiten, wenn sich mehrere Fälle hinter einander in einer bestimmten Ordnung ereignen.

§ 1.

Wir setzen im gegenwärtigen Kapitel wiederum voraus, dass von der Anzahl m aller Fälle, die von einer gegebenen Handlung, Bewegung, oder einem gegebenen Zustande abhängen, sich q Fälle hinter einander ereignen sollen, dass man aus der ganzen Anzahl von Fällen eine Parthie aussondert, und die Zahl der ausgesonderten Fälle n ist.

Allein es sind hier folgende zwei verschiedene Fälle möglich.

Entweder die Begebenheit hängt von der Ereigniss der Zahl r von den ausgesonderten Fällen ab, es sei die Ordnung, in welcher sie sich ereignen, welche sie wolle. Für diesen Fall haben wir in dem vorhergehenden Kapitel die Wahrscheinlichkeit der bestimmten Begebenheit nach einer allgemeinen Methode finden gelehrt.

Oder es ist möglich, dass die Begebenheit in der Ereigniss der Anzahl r von den ausgesonderten Fällen nach einer bestimmten Ordnung bestehet.

Zum Beispiel. Wenn man von den 32 Karten eines Piketspiels vier in einer bestimmten Ordnung nennet, dergleichen folgende ist:

Pik-As die dritte, Tref-König die fünfte,

Koeur-Dame die siebente, Kareau-Bube die zehnte,

wenn man hierauf blindlings zehn aus den 32 gegebenen Karten hinter einander je eine auf einmal herausziehet, und verlanget, dass unter den zehn gezogenen Karten wenigstens zwei von denjenigen, die man genannt hat, an der ihnen angewiesenen Stelle erscheinen sollen; das ist, dass sein soll:

Pik-As die dritte, und Tref-König die fünfte; oder
Pik-As die dritte, und Koeur-Dame die ſiebente; oder
Pik-As die dritte, und Kareau-Bube die 10te; oder
Tref-König die fünfte, und Koeur-Dame die 7te; oder
Tref-König die 5te, und Kareau-Bube die 10te; oder
Koeur-Dame die 7te, und Kareau-Bube die 10te,

ſo ſoll man die Wahrſcheinlichkeit der verlangten Begebenheit unter den genannten Vorausſetzungen finden; und dieſes wird der Innhalt des gegenwärtigen Kapitels ſein.

§. 2.

Lehrsatz. *Es ſei m die Anzahl der Fälle, die von einer gegebenen Handlung, Bewegung, oder einem gegebenen Zuſtande abhängen: ich ſage, die Zahl, welche anzeigt, auf wie viel gleich mögliche Arten q von dieſen Fällen hinter einander je einer auf einmal ſich ereignen können, iſt* $m.(m-1)\ldots.(m-q+1)$.

Beweis. Werden die gegebenen Fälle durch die Buchſtaben a, b, c, d, f, etc. an der Zahl m angedeutet; ſo iſt offenbar, daſs die gleich möglichen Arten, auf welche ein einziger von dieſen Fällen ſich ereignen kann, durch die Glieder folgender Tafel

$$a,\ b,\ c,\ d,\ f,\ —$$

dargeſtellet werden, deren Anzahl $= m$ iſt.

Die Anzahl der Arten, auf welche zwei von den gegebenen Fällen ſich ereignen können, iſt die Zahl der Glieder folgender Tafel:

ab	ba	ca	da	fa	—
ac	bc	cb	db	fb	—
ad	bd	cd	dc	fc	—
af	bf	cf	df	fd	—
—	—	—	—	—	—

Die Anzahl der Buchſtaben in dieſer Tafel iſt $= m$, in jeder horizontalen Reihe ſind m Glieder, und zu jedem Buchſtaben gehört eine ſenkrechte Reihe von $m-1$ Gliedern.

Weil alſo $m-1$ horizontale Reihen, jede von m Gliedern, vorhanden ſind; ſo iſt die Anzahl der Glieder $= m\,(m-1)$.

Die Anzahl der gleich möglichen Arten, auf welche drei von den m gegebenen Fällen ſich zutragen können, iſt die Zahl der Glieder folgender Tafel:

a b c	*b a c*	*c a b*	*d a b*	*f a b*	—
a b d	*b a d*	*c a d*	*d a c*	*f a c*	—
a b f	*b a f*	*c a f*	*d a f*	*f a d*	—
—	—	—	—	—	—
a c b	*b c a*	*c b a*	*d b a*	*f b a*	—
a c d	*b c d*	*c b d*	*d b c*	*f b c*	—
a c f	*b c f*	*c b f*	*d b f*	*f b d*	—
—	—	—	—	—	—
a d b	*b d a*	*c d a*	*d c a*	*f c a*	—
a d c	*b d c*	*c d b*	*d c b*	*f c b*	—
a d f	*b d f*	*c d f*	*d c f*	*f c d*	—
—	—	—	—	—	—
a f b	*b f a*	*c f a*	*d f a*	*f d a*	—
a f c	*b f c*	*c f b*	*d f b*	*f d b*	—
a f d	*b f d*	*c f d*	*d f c*	*f d c*	—
—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—

in welcher die Zahl der Buchſtaben m iſt, und wo in die Augen fällt, daſs die Zahl der Glieder $m(m-1)(m-2)$ iſt. Und ſo weiter.

*Nämlich zu jedem Gliede der zweiten Tafel kommt noch ein dritter Buchſtabe hinzu, deren es $m-2$ giebt, wodurch demnach aus jedem Gliede der zweiten Tafel $m-2$ neue Glieder, jedes von drei Buchſtaben, entſpringen. Da nun die zweite Tafel aus $m\,(m-1)$ Gliedern beſteht, ſo iſt die Anzahl der Glieder in der dritten Tafel $= m\,(m-1).(m-2)$.

*Hieraus erhellet, daſs die Anzahl der Arten, auf welche vier von m gegebenen Fällen ſich ereignen können, ſein wird $= m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)$. Denn zu jedem Gliede der dritten Tafel kommt noch ein vierter Buchſtabe hinzu, deren es $m-3$ giebt, wodurch alſo aus jedem Gliede $m-3$ neue Glieder, jedes von vier Buchſtaben, entſpringen. Und ſo weiter.

*Iſt überhaupt die Anzahl der gleich möglichen Arten, auf welche eine Anzahl $q-1$ von m gegebenen Fällen ſich hinter einander, je ein Fall auf einmal, ereignen kann, $= m\,(m-1)\,(m-2)\ldots.(m-q+2)$; ſo iſt die Anzahl der gleich möglichen Arten, auf welche die Zahl q von m gegebenen Fällen ſich hinter einander, je einer auf einmal, ereignen kann, $m\,(m-1)\,(m-2)\ldots.(m-q+2)\,(m-q+1)$. Nämlich jedes Glied derjenigen Tafel, welche die Anzahl der Arten angiebt, auf welche $q-1$ von m Fällen ſich ereignen können, beſteht aus $q-1$ Buchſtaben, ſo daſs in jedem Gliede erwähnter Tafel $m-q+1$ Buchſtaben von der Menge m aller nicht vorhanden ſind. Wird nun die nächſt höhere Tafel aus ihr gemacht; ſo kann von den übrig gebliebenen $m-q+1$ Buchſtaben, je einer auf einmal, zu den $q-1$ Buchſtaben der vorhergehenden Tafel hinzugefügt werden, wodurch aus jedem Gliede der vorhergehenden Tafel $m-q+1$ Glieder entſtehen, die zur nächſt höhern Tafel gehören, daſs alſo die nächſt höhere Tafel $m.(m-1)\ldots..(m-q+1)$ Glieder bekömmt.

*Aber für $q-1=3$ iſt die Zahl $m\,(m-1)\,(m-2)$, wie in den berechneten Fällen; folglich iſt die Anzahl der Arten, auf welche vier von m gegebenen Fällen ſich auf die vorgeſchriebene Art ereignen können, $= m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)$. Und ſo weiter.

§. 3.

Beiſpiel. Von den 90 Nummern des Lottoſpiels werden in der nächſten Ziehung deſſelben fünf Num-

mern hinter einander, je eine auf einmal, gezogen: um zu erfahren, auf wie viel Arten solches möglich sei, oder welches einerlei ist, wie viel es bestimmte gleich mögliche Quinen gebe, setze man in der Formel $m \dots (m-q+1)$, $m=90$, $q=5$, wodurch sie sich in $90 \dots 86 = 5\,273\,912\,160$ verwandelt, welches die gesuchte Zahl ist. Eben so wird die Menge der bestimmten Amben, $m=90$, $q=2$ gesetzt, $= 90 \cdot 89 = 8010$; die Menge der bestimmten Ternen $= 90 \cdot 89 \cdot 88 = 704\,880$; und so weiter.

§. 4.

Zusatz. Wenn $q=m$ ist, so verwandelt sich der allgemeine Ausdruk $m \dots (m-q+1)$ in $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m$, welches das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis m ist, und so viel sagen will, daſs die gegebenen m Fälle hinter einander, je einer auf einmal, auf $1 \cdot 2 \dots m$ Arten sich ereignen können. So können alle 24 Buchstaben des Alphabets hinter einander jeder einmal genannt, oder auf $1 \cdot 2 \dots 24 = 620\,448\,401\,733\,239\,439\,360\,000$ Arten in einer Reihe aneinander gesetzt werden.

§. 5.*

Aufgabe. *Es werden drei Nummern im Lotto, z. B. 6, 20, 84, zu einer bestimmten Terne also besetzt, daſs 6 die erste, 84 die dritte, und 20 die letzte sein soll, welche herauskommt. Man fragt, auf wie viel gleich mögliche Arten just eine von diesen gewählten Nummern in der nächsten Ziehung herauskommen kann, doch so, daſs keine derselben an der ihr angewiesenen Stelle zum Vorschein komme, das ist, daſs die Nummer 6, wenn sie herauskommt, nicht die erste Stelle, die Nummer 84, wenn sie herauskommt, nicht die dritte, und endlich 20 nicht die fünfte oder letzte Stelle in der Ordnung der Herausziehung haben werde.*

Auflösung. Die Zahl 6 kann die erste, zweite, dritte, vierte oder fünfte Stelle in der Ordnung der Her-

ausziehung einnehmen, alſo iſt für Nummer 6 die Anzahl aller möglichen Stellen, die ſie bei der Ziehung einnehmen kann, ſie mag an ihrem angewieſenen Orte, oder nicht an demſelben erſcheinen, = 5.

Da aber, wenn 6 die erſte Stelle einnimmt, ſie nach der Vorausſetzung an ihrem Orte erſcheinet; ſo wird 5 − 1 oder 4 die Anzahl der Arten ſein, auf welche die genannte Nummer anders als an ihrem angewieſenen Orte zum Vorſchein kommen kann.

Eben dieſes, was jetzt von Nummer 6 geſagt worden, gilt aber auch von den beiden übrigen Nummern 20 und 84. Folglich erhellet, daſs die Anzahl der Arten, auf welche nur eine von den gewählten Nummern ſich ereignen kann, ſo, daſs ſie nicht die ihr vorgeſchriebene Stelle einnehmen wird, = 3 . 4 oder 12 iſt.

Aber zu einer jeden von dieſen gleich möglichen Arten können ſich 5 − 1 das iſt 4 von den 90 − 3 das iſt 87 nicht ausgewählten Nummern, in den 5 − 1 das iſt 4 noch übrigen Plätzen, auf ſo viel Arten ereignen, als durch die Zahl (§. 2)

$$87 \ldots (87 - 4 + 1) = 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 = 53\,421\,480$$

angedeutet werden.

Folglich iſt im gegenwärtigen Exempel die geſuchte Anzahl der gleich möglichen Arten, auf welche nur eine von den beſetzten Nummern dergeſtalt herauskommen wird, daſs ſie nicht an der ihr angewieſenen Stelle erſcheinet,

$$= 12 \cdot 53\,421\,480 = 641\,057\,760. \quad \textit{W. Z. F.}$$

§. 6.*

Aufgabe. *Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs ſich die im vorigen §. 5. beſtimmte Begebenheit zutragen werde?*

Auflösung. Der Zähler iſt = 641057760, und der Nenner = 5273912160 (§. 3.), folglich iſt die geſuchte Wahrſcheinlichkeit $= \frac{641057760}{5273912160}$.

§. 7.

Die Frage wäre alſo allgemein folgende:

Aufgabe. *Aus der Anzahl aller Fälle, = m, die von einer gegebenen Handlung, Bewegung, oder einem gegebenen Zuſtande abhängen, werde eine Parthie ausgeſondert, und die Anzahl dieſer ausgeſonderten Fälle ſei n; man nenne die ausgeſonderten Fälle hinter einander, je einen auf einmal, in einer beſtimmten Ordnung: zum Beiſpiel, der Fall a der erſte, b der zweite, c der dritte, u. ſ. f.; von den m gegebenen Fällen mögen ſich q hinter einander, je einer auf einmal, ereignen. Man fragt, auf wie viel gleich mögliche Arten ſich juſt einer von den ausgeſonderten Fällen ereignen kann, ſo, daſs keiner davon an der ihm angewieſenen Stelle erſcheinet.*

Auflösung. Der Fall *a* kann eine von den vorausgeſetzten *q* Stellen, auf *q* gleich mögliche Arten einnehmen, welche durch die Glieder der folgenden Tafel angezeigt werden:

a	*	*	*	*
*	*a*	*	*	*
*	*	*a*	*	*
*	*	*	*a*	*
*	*	*	*	*a*

in welcher man vorausſetzt, daſs *q*, die Anzahl der Plätze, 5 iſt, wo die Sternchen (*) die Stellen für die nicht ausgewählten Fälle anzeigen, und aus welcher man erſiehet, daſs, wenn man auch eine andere Zahl als 5 für die Anzahl der Stellen angenommen hätte, die Anzahl der Glieder überhaupt *q* geweſen ſein würde.

Allein, um diejenige Zahl zu erhalten, welche anzeigt, auf wie viel Arten es möglich iſt, daſs der Fall *a* ſich nicht an ſeinem Orte ereignet, muſs man von der Anzahl der Glieder obiger Tafel, dasjenige Glied abrechnen, wo *a* an ſeiner Stelle ſich befindet. Folglich deutet $q - 1$ an, auf wie viel Arten der Fall *a* ſich anders als an ſeinem Orte ereignen kann.

Was jetzt von dem Falle *a* behauptet worden ist, kann auf einen jeden der übrigen ausgewählten Fälle *b*, *c*, *d*, etc. deren an der Zahl *n* sind, angewendet werden. Hieraus siehet man, dass die Anzahl der Arten, auf welche ein einziger von den ausgesonderten Fällen sich ereignen kann, so dass er nicht an der ihm angewiesenen Stelle zum Vorschein kommt, $= n.(q-1)$ ist.

Aber zu einer jeden von diesen Arten kann sich eine Anzahl $q-1$ von den $m-n$ nicht ausgesonderten Fällen, in den $q-1$ übrigen Stellen auf so viel Arten ereignen, als durch $(m-n) \ldots\ldots (m-n-q+2)$ ausgedrükt wird (§. 2.).

Folglich ist in der gegenwärtigen Aufgabe die Anzahl der gleich möglichen Arten, auf welche nur ein einziger von den ausgesonderten Fällen sich ereignen kann, so dass dieser nicht an der ihm angewiesenen Stelle zum Vorschein kommt, $= n.(q-1).(m-n) \ldots\ldots (m-n-q+2)$ oder $\frac{n}{1}.\binom{1.q}{-1}.(m-n).(m-n-1) \ldots\ldots (m-n-q+2)$. *W. Z. F.*

§. 8.*

Beispiel 1. Aus einer deutschen Karte von 32 Blättern wähle man sechs Blätter in nachfolgender Ordnung:

Eichel-Daus, die erste,
Schellen-Daus, die zweite,
Grüner König, die vierte,
Rother König, die fünfte,
Rother Unter, die siebente,
Grüner Unter, die achte,

und ziehe alsdann aus dieser Karte blindlings acht Blätter hinter einander nur eins auf einmal heraus. So erhält man die Menge der Arten, dass just eins von den genannten Blättern unter den gezogenen, aber dasselbe nicht an der ihm angewiesenen Stelle sich befindet, wenn man in der vorhin (§. 7.) gefundenen allge-

meinen Formel, $m=32$, $q=8$, und $n=6$ setzt. Also ist die gesuchte Zahl: $6.7.26.25.24.23.22.21.20$.

§. 9.*

Beispiel 2. Man nenne vier Blätter aus einer Piketkarte in folgender bestimmten Ordnung:

Pik-As, die dritte,
Tref-König, die fünfte,
Koeur-Dame, die siebente,
Kareau-Bube, die zehnte,

und ziehe alsdann aus den 32 gegebenen Karten zehn Stük blindlings und ohne zu wählen hinter einander heraus; so ist die Menge der gleich möglichen Arten, dass just ein Blatt von den genannten vier Blättern unter den gezogenen sein, aber nicht an seiner Stelle sich befinden wird, $=4.9.28.27.26\ldots.20$.

§. 10.*

Aufgabe. *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den (§. 7.) gemachten Voraussetzungen just einer von den n ausgesonderten Fällen, aber nicht an der ihm angewiesenen Stelle sich ereignen wird?*

Auflösung. Der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit ist $=n\,(q-1).(m-n)\,(m-n-1)\ldots.(m-n-q+2)$ (§. 7.) der Nenner $=m\,(m-1)\ldots.(m-q+1)$ (§. 2.) Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$=\frac{n\,(q-1).(m-n)\,(m-n-1)\ldots..(m-n-q+2)}{m\,(m-1)\ldots.\,(m-q+1)}$$

oder $\frac{n}{1}.\left(\frac{1.q}{-1}\right).\frac{(m-n)\ldots.\,(m-n-q+2)}{m\,.\,.\,.\,.\,(m-q+1)}$.

So ist für das erste Beispiel (§. 8.) die Wahrscheinlichkeit, dass nur eins von den ausgesonderten Blättern, aber nicht an der ihm angewiesenen Stelle herausgezogen werden wird

$$=\frac{6.7.26\ldots.20}{32.31\ldots.25}=\frac{6.7.24\ldots.20}{32\ldots.27}.$$

Und

Und für das zweite Beispiel (§. 9.) ist eben diese Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{4\cdot 9\cdot 28\ldots 20}{32\ldots 23} = \frac{4\cdot 9\cdot 22\cdot 21\cdot 20}{32\cdot 31\cdot 30\cdot 29}.$$

§. 11. *

Zusatz. Setzt man in der allgemeinen Formel (§. 10.) $n=q$; so verwandelt sie sich in

$$\frac{n\,(n-1)\cdot(m-n)\,(m-n-1)\ldots(m-2n+2)}{m\,(m-1)\ldots(m-n+1)}.$$

Z. B. Aus einem Haufen von zehn verschiedenen Karten soll man blindlings hinter einander acht Karten je eine auf einmal herausziehen. Nun ist einem jeden Blatte von acht aus diesen zehn gegebenen Karten ausgesonderten Blättern eine bestimmte Stelle angewiesen worden. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den acht gezogenen Karten nur eine von den acht ausgesonderten, aber nicht an der ihr angewiesenen Stelle sein wird?

Hier ist $m=10$, $n=8$, folglich die gesuchte Wahrscheinlichkeit: $\frac{8\cdot 7\cdot 2\cdot 1\cdot 0\cdot -1\cdot -2\cdot -3\cdot -4}{10\cdot 9\ldots 3} = 0$; dieses zeigt an, dass die bestimmte Begebenheit unmöglich ist.

Wenn man $n=1$ setzt; so verwandelt sich die allgemeine Formel (§. 10) in

$$\frac{(q-1)\cdot(m-1)\,(m-2)\ldots(m-q+1)}{m\,(m-1)\ldots(m-q+1)} = \frac{q-1}{m}.$$

Z. B. Im Zahlen-Lotto besetzt man eine Nummer zu einem bestimmten Auszuge; Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie herauskommen, aber nicht an der ihr angewiesenen Stelle sein wird?

Hier ist $m=90$, $q=5$; folglich die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{4}{90} = \frac{2}{45}$. Demnach ist $1-\frac{2}{45}$ oder $\frac{43}{45}$ diejenige Wahrscheinlichkeit, dass sie entweder an der bestimmten Stelle oder gar nicht herauskommen wird.

Setzt man $m=q$, so verwandelt sich die allgemeine Formel in $\frac{n.(m-1).(m-n)\,(m-n-1)\ldots.(2-n)}{m\,(m-1)\ldots..2.1}$, welcher Ausdruk für $n > 1$ unmöglich ist. Ist $m=q$, und $n=1$, so bekömmt man den Bruch $\frac{m-1}{m}$.

Z. B. Aus zehn verschiedenen Kartenblättern wählt man drei, und giebt jedem Blatte von diesen dreien eine bestimmte Stelle; hierauf zieht man die zehn gegebenen Karten alle hinter einander, je eine auf einmal: so ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich nur eine von den drei gewählten darunter befinden, und nicht an der ihr angewiesenen Stelle herausgezogen werden wird, $= \frac{3.9.7.6.5.4.3.2.1.0.-1}{10\ldots..2.1} = 0$, oder die bestimmte Begebenheit ist unmöglich.

Wählt man nur ein Blatt aus, und giebt demselben eine bestimmte Stelle; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass dasselbe nicht an seiner Stelle herauskommen wird, $= \frac{9}{10}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Blatt an seiner Stelle herauskommen wird, $= 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$.

§. 12.

Aufgabe. *Man sucht, unter eben den in §. 7. gemachten Voraussetzungen, auf wie viel gleich mögliche Arten sich keiner von den n ausgesonderten Fällen ereignen kann.*

Auflösung. Wenn sich keiner von den ausgesonderten Fällen ereignet, so können die $m-n$ nicht ausgesonderten Fälle die q vorausgesetzten Stellen auf so viel verschiedene Arten einnehmen, als die Zahl $(m-n)\ldots.(m-n-q+1)$ angiebt (§. 2.); Folglich ist die Anzahl der gleich möglichen Arten, auf welche keiner von den ausgesonderten Fällen sich ereignen kann, $(m-n)\ldots..$

$(m-n-q+1)$ oder $1.(1).(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-q+1)$.
W. Z. F.

§. 13.*

Aufgabe. *Man sucht unter den (§. 7.) gemachten Voraussetzungen die Wahrscheinlichkeit, daſs keiner von den n ausgesonderten Fällen sich ereignet.*

Auflösung. Der Zähler ist diejenige Zahl, welche anzeigt, auf wie viel gleich mögliche Arten sich keiner von den ausgesonderten Fällen ereignen kann (§. 12); der Nenner ist $m\ldots(m-q+1)$ (§. 2). Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-q+1)}{m(m-1)\ldots(m-q+1)}.$$ Man vergleiche Kap. V. §. 17.

Zum Beispiel. Aus dreizehn gegebenen verschiedenen Karten wählt man vier, so, daſs jeder davon eine bestimmte Stelle angewiesen wird, und zieht alsdann sechs Blätter hinter einander blindlings heraus: so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs unter den sechs gezogenen keine von den vier ausgewählten sich befinden wird, $= \frac{9\ldots4}{13\ldots8} = \frac{7}{143}$.

Zusatz. Ist $n = 1$, so verwandelt sich die gefundene Formel in $\frac{m-q}{m}$, und für das Lotto ist $\frac{m-q}{m} = \frac{90-5}{90} = \frac{85}{90}$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, daſs die besetzte Nummer beim ersten Zuge, oder beim zweiten, dritten, vierten oder fünften Zuge herauskommen, oder daſs sie bei irgend einem Zuge erscheinen wird, $= 1 - \frac{85}{90} = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$. Und die Wahrscheinlichkeit, daſs die zu einem bestimmten Auszuge besetzte Nummer an der ihr angewiesenen Stelle zum Vorschein kommen

wird, ist (§. 11) $= 1 - \left(\frac{85}{90} + \frac{4}{90}\right) = \frac{1}{90}$.

§. 14.

Lehrsatz. *Wenn die Voraussetzungen immer bleiben, wie sie (§. 7) gemacht worden sind; so ist die Anzahl der gleich möglichen Arten, auf welche sich just zwei von den ausgesonderten Fällen ereignen können, so dass keiner davon an der ihm angewiesenen Stelle zum Vorschein kommt,* $= {}^{n}C.((q-2)(q-1)+1).(m-n)(m-n-1)....(m-n-q+3)$, *oder* $\frac{n.(n-1)}{1 . 2} \cdot \left\{ \begin{matrix} 1.q.(q-1) \\ -2.(q-1) \\ +1 \end{matrix} \right\} . (m-n)....(m-n-q+3)$.

Beweis. 1. Der Fall *a* kann unter den *q* sich begebenden Fällen, auf *q* gleich mögliche Arten sich ereignen, oder eine von den angenommenen *q* Stellen auf *q* gleich mögliche Arten einnehmen (§. 7). Nimmt er die erste Stelle ein, so kann dazu der Fall *b*, $q-1$ Stellen einnehmen; nimmt er die zweite Stelle ein, so finden für den Fall *b*, wenn er sich nach der Ereigniss von *a* begiebt, $q-2$ Stellen statt; nimmt er die dritte Stelle ein, so finden für *b*, unter der vorigen Bedingung, $q-3$ Stellen statt; und so weiter; nimmt endlich *a* die vorletzte oder $(q-1)$te Stelle ein, so kann *b* nur die darauf folgende letzte Stelle einnehmen. Folglich ist die Menge der gleich möglichen Arten, auf welche just die beiden *a* und *b* von den ausgesonderten Fällen, und zwar der Fall *a* zuerst, und alsdann *b*, sich ereignen können, die Summe der natürlichen Zahlen:

$$(q-1)+(q-2)+(q-3)+ \cdots +3+2+1 = \frac{q.(q-1)}{2} \text{ (Kap. III. §. 16.)}.$$

2. Da sich nun dieses eben so verhält, wenn sich *b* zuerst und alsdann *a* ereignet; so darf man nur die eben gefundene Summe doppelt nehmen, um die Zahl

zu erhalten, welche anzeigt, auf wie viel gleich mögliche Arten sich just zwei: *a* und *b*, von den ausgesonderten Fällen ereignen können; welche also ist: $q.(q-1)$.

3. Zur Erläuterung des eben gesagten dient folgende Tabelle, in welcher alle gleich mögliche Arten, auf welche sich die beiden Fälle *a* und *b* von den *n* ausgesonderten Fällen zugleich ereignen können, angegeben, und diejenigen Stellen, worin sich Fälle von den nicht ausgesonderten Fällen befinden, mit Sternchen bezeichnet worden sind, imgleichen, der Allgemeinheit unbeschadet, $q=5$ wie in §. 7. gesetzt worden ist.

a	*b*	*	*	*	*b*	*a*	*	*	*
a	*	*b*	*	*	*b*	*	*a*	*	*
a	*	*	*b*	*	*b*	*	*	*a*	*
a	*	*	*	*b*	*b*	*	*	*	*a*
*	*a*	*b*	*	*	*	*b*	*a*	*	*
*	*a*	*	*b*	*	*	*b*	*	*a*	*
*	*a*	*	*	*b*	*	*b*	*	*	*a*
*	*	*a*	*b*	*	*	*	*b*	*a*	*
*	*	*a*	*	*b*	*	*	*b*	*	*a*
*	*	*	*a*	*b*	*	*	*	*b*	*a*

4. *Oder:* Weil der Fall *a* unter den *q* sich begebenden Fällen *q* mal seine Stelle verändern kann, und bei jeder Versetzung von *a* der Fall *b*, $(q-1)$ mal seine Stelle verändern kann; so ist die Zahl, welche anzeigt, auf wie viel gleich mögliche Arten sich just zwei von den ausgesonderten Fällen, *a* und *b*, ereignen können, $= q.(q-1)$.

5. Dieses läßt sich ebenfalls für $q=5$, durch folgende Tafel erläutern:

a	*b*	*	*	*	*b*	*a*	*	*	*	*b*	*	*a*	*	*
a	*	*b*	*	*	*	*a*	*b*	*	*	*	*b*	*a*	*	*
a	*	*	*b*	*	*	*a*	*	*b*	*	*	*	*a*	*b*	*
a	*	*	*	*b*	*	*a*	*	*	*b*	*	*	*a*	*	*b*
b	*	*	*a*	*	*b*	*	*	*	*a*					
*	*b*	*	*a*	*	*	*b*	*	*	*a*					
*	*	*b*	*a*	*	*	*	*b*	*	*a*					
*	*	*	*a*	*b*	*	*	*	*b*	*a*					

6. Alſo können die beiden Fälle a und b zwei von den q gegebenen Stellen auf $q.(q-1)$ Arten einnehmen, welche durch die Glieder beigefügter Tafeln (3, 5) angedeutet werden.

7. Von den gefundenen $q.(q-1)$ Gliedern muſs man diejenigen abrechnen, wo a die erſte, und b die zweite Stelle einnimmt; welche an der Zahl $2.(q-1)$ ſind, weniger dasjenige Glied, wo a die erſte und b die zweite Stelle einnimmt.

8. Alſo können die beiden Fälle a und b auf ſo viel Arten ſich ereignen, ſo daſs keiner an ſeiner Stelle erſcheinet, als die Zahl

$$q(q-1)-(2(q-1)-1)=q(q-1)-2(q-1)+1 \text{ oder}$$
$$(q-2)(q-1)+1 \text{ angiebt.}$$

9. Das, was jetzt von den beiden Fällen a und b geſagt worden iſt, läſst ſich auf gleiche Weiſe auf die Fälle:

$$\begin{cases} a \text{ u. } b \\ a \text{ u. } c,\ b \text{ u. } c \\ a \text{ u. } d,\ b \text{ u. } d,\ c \text{ u. } d \\ a \text{ u. } f,\ b \text{ u. } f,\ c \text{ u. } f,\ d \text{ u. } f \\ \text{———— ———— ———— ———— ————} \end{cases}$$

anwenden, deren Anzahl $= \frac{n(n-1)}{1.2}$ iſt. Hieraus erſiehet man, daſs die Anzahl aller gleich möglichen Arten, auf welche je zwei allein von den ausgeſonderten Fällen ſich ereignen können, ſo, daſs keiner an der ihm ange-

wiesenen Stelle zum Vorschein kommt, sein wird:

$$\frac{n.(n-1)}{1\;.\;2}.\left\{\begin{matrix}1.q.(q-1)\\-2.(q-1)\\+1\end{matrix}\right\}\quad\text{oder}$$

$$^{n}C.((q-2)(q-1)+1).$$

10. Da sich überhaupt q Fälle hinter einander, je einer auf einmal, ereignen, und darunter just zwei von den n ausgewählten Fällen sein sollen; so können bei der Ereigniss einer jeden dieser (in 9) gefundenen Arten, $q-2$ von den $m-n$ nicht ausgewählten Fällen, die $q-2$ noch übrigen Stellen auf so viel Arten einnehmen, als die Zahl $(m-n)(m-n-1)....(m-n-q+3)$ angiebt.

11. Folglich ist die gesuchte Anzahl aller gleich möglichen Arten, auf welche je zwei Fälle allein von den ausgesonderten Fällen, keiner an seiner Stelle, sich ereignen können, =

$$\frac{n.(n-1)}{1\;.\;2}.\left\{\begin{matrix}1.q.(q-1)\\-2.(q-1)\\+1\end{matrix}\right\}.(m-n)....(m-n-q+3)\quad\text{oder}$$

$$^{n}C.((q-2)(q-1)+1).(m-n)(m-n-1)....(m-n-q+3).$$

W. Z. E.

§. 15.*

Aufgabe. *Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei den §. 7. gemachten Voraussetzungen je zwei allein von den ausgesonderten Fällen, keiner an seiner Stelle, sich begeben werden?*

Auflösung. Der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit ist die Zahl

$$^{n}C.((q-2)(q-1)+1).(m-n)....(m-n-q+3), (§.14.);$$

Der Nenner ist $m....(m-q+1)$ (§. 2.). Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$^{n}C.((q-2)(q-1)+1).\frac{(m-n)....(m-n-q+3)}{m....(m-q+1)}\quad\text{oder}$$

$$\frac{n.(n-1)}{1.2}.\left\{\begin{matrix}1.q.(q-1)\\-2.(q-1)\\+1\end{matrix}\right\}.\frac{(m-n)\ldots(m-n-q+3)}{m\ldots(m-q+1)}.$$

§. 16.*

Beispiel 1. Werden von den 32 Piketkarten vier in folgender Ordnung ausgesprochen:

Herzen-König, die erste,
Tref-König, die fünfte,
Kareau-As, die siebente,
Pik-Dame, die zehnte,

und soll man aus den gegebenen 32 Karten zehn blindlings hinter einander, je eine auf einmal, herausziehen; so bekömmt man die Wahrscheinlichkeit, dafs nur zwei von den ausgerufenen unter den gezogenen sich befinden werden, keine aber an der ihr angewiesenen Stelle herausgezogen werden wird, wenn man in der (§. 15.) gefundenen allgemeinen Formel $m=32$, $q=10$, und $n=4$ setzt $= \frac{4.3}{1.2}.(8.9+1).\frac{28.27\ldots 21}{32.31\ldots 23}$.

§. 17.*

Beispiel 2. Es werden im Lotto vier Nummern z. B. 4, 18, 29, 65, zu einer bestimmten Quaterne also besetzt, dafs Nummer 4 die erste, 65 die zweite, 18 die vierte, und 29 die fünfte sein soll, welche herauskommt. Man sucht die Wahrscheinlichkeit, dafs nur zwei davon herauskommen, also

entweder 4 und 18,
oder 4 und 29, oder 18 und 29,
oder 4 und 65, oder 18 und 65, oder 29 und 65,

keine aber an der ihr angewiesenen Stelle erscheinet.

Man setze (§. 15.) $m=90$, $q=5$, $n=4$, also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{4.3}{1.2}.(3.4+1).\frac{86.85.84}{90\ldots 86}$.

§. 18.*

Beispiel 3. Man hat zwei Nummern des Lottospiels zu einer bestimmten Ambe besetzt, und will die Wahrscheinlichkeit wissen, dass sie beide, aber keine an ihrer Stelle, herauskommen.

Hier ist $n=2$, und für diesen Fall verwandelt sich die allgemeine Formel (§. 15.) in folgende:

$$((q-2)(q-1)+1).\frac{(m-2)(m-3)(m-4)\ldots.(m-q+1)}{m.(m-1)(m-2)\ldots.(m-q+1)}=$$

$\frac{(q-2)(q-1)+1}{m\ (m-1)}$. Hierinnen also $m=90$, und $q=5$ gesetzt, erhält man die gesuchte Wahrscheinlichkeit $=\frac{3.4+1}{90.89}=\frac{13}{8010}$. Also ist diejenige Wahrscheinlichkeit, dass beide an ihrer Stelle, oder eine an ihrer Stelle und die andere nicht an ihrer Stelle, oder nur eine (an ihrer Stelle oder nicht an ihrer Stelle), oder keine herauskommt, $=1-\frac{13}{8010}=\frac{7997}{8010}$.

§. 19.*

Zusatz. Wenn $n=q$ ist, so verwandelt sich die allgemeine Formel (§. 15.) in

$$\frac{n(n-1)}{1.2}.((n-2)(n-1)+1).\frac{(m-n)(m-n-1)\ldots.(m-2n+3)}{m\,(m-1)\ldots.(m-n+1)}.$$

Z. B. 1. Man besetzt im Lotto fünf Nummern zu einer bestimmten Quine. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass nur zwei Nummern, keine an ihrer Stelle, herauskommen werden?

Es ist hier $m=90$, $n=5$, also die gesuchte Wahrscheinlichkeit $=\frac{5.4}{1.2}.(3.4+1).\frac{85.84.83}{90\ldots.86}$.

2. In einer Urne liegen zehn Kugeln, jede mit einer Zahl, von 1 bis 10, bezeichnet; acht Nummern

werden in folgender Ordnung hinter einander ausgesprochen: Num. 2 die erste, 1 die zweite, 4 die vierte, 6 die fünfte, 3 die siebente, 10 die achte, 7 die neunte, 5 die zehnte; und eben so viel werden alsdann blindlings herausgezogen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass just zwei von den in bestimmter Ordnung ausgesprochenen Nummern herauskommen werden, aber keine an der ihr angewiesenen Stelle erscheinen wird?

Hier ist $m = 10$, $n = 8$, folglich die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{8.7}{1.2} . (6.7+1) . \frac{2.1.0.-1.-2.-3}{10.9....3} = 0$, oder die bestimmte Begebenheit ist unmöglich.

Wenn $n = q = 2$, so ist die Formel für die Wahrscheinlichkeit: $\frac{1}{m(m-1)}$ (§. 18.).

Z. B. Es sind fünf Kartenblätter gegeben, darunter Pik-As und Koeur-Dame befindlich sind. Man sucht die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn zwei hinter einander blindlings herausgezogen werden, dieses die beiden genannten, aber in der umgekehrten Ordnung: Koeur-Dame und Pik-As sind.

Es ist $m = 5$, und also die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{5.4} = \frac{1}{20}$.

Wenn $m = q = n = 2$, so ist die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$.

Z. B. Es liegen zwei Kartenblätter, Kareau-As und Koeur-König, verdekt auf einem Tische; man nennt jenes und ziehet hierauf ein Blatt: so ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Blatt nicht das ebengenannte sein wird, $= \frac{1}{2}$, eben so gross als die Wahrscheinlichkeit, dass diese Begebenheit nicht geschehen, oder dass das genannte Blatt gezogen werden wird.

Setzt man $m=q$, so verwandelt sich die allgemeine Formel (§. 15) in

$$\frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\big((m-2)(m-1)+1\big).\frac{(m-n)\ldots.(3-n)}{m\ldots.1}=$$

unmöglich oder o, für $n>2$, wie ohnedies erhellet. Aber für $m=q$ und $n=2$ ist die Wahrscheinlichkeit =

$$\big((m-2)(m-1)+1\big).\frac{(m-2)(m-3)\ldots.2\,.\,1}{m.(m-1)(m-2)\ldots2.1}=\frac{(m-2)(m-1)+1}{m\,(m-1)}.$$

Z. B. Aus fünf Kartenblättern wählt man zwei Blätter: Kareau-Bube, die zweite,
Tref-König, die fünfte,
und zieht dann alle diese fünf Blätter, eins nach dem andern; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass keins von den genannten zwei Blättern an seiner Stelle herausgezogen werden wird, $=\frac{3\cdot4+1}{5\cdot4}=\frac{13}{20}$.

§. 20.*

Lehrsatz. *Sollen just drei Fälle von den n ausgesonderten Fällen, aber kein einziger von diesen dreien an seiner Stelle sich ereignen; so ist die Wahrscheinlichkeit dieser Begebenheit =*

$$\frac{{}^nD.\big(q.(q-1).(q-2)-3.(q-1)^2-1\big)\times(m-n).(m-n-1)\ldots.(m-n-q+4)}{m.(m-1)\ldots..(m-q+1)}\text{ oder}$$

$$\frac{n.(n-1).(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}.\left\{\begin{matrix}1.(q-2)(q-1)q\\-3.(q-2)(q-1)\\+3.(q-2)\\-1\end{matrix}\right\}.\frac{(m-n)\ldots(m-n-q+4)}{m\ldots.(m-q+1)}.$$

Beweis. 1) Die Zahl, welche anzeigt, auf wie viel gleich mögliche Arten sich just folgende drei, a, b, c, von den n ausgesonderten Fällen ereignen können, ist $=q\,(q-1)\,(q-2)$; welches sich, für $q=5$, durch folgende Tafel erläutern läst, die aus der (in §. 14. Num. 5.) angegebenen, sehr leicht herzuleiten ist:

	Erste verticale Kolumne					Zweite verticale Kolumne					Dritte verticale Kolumne					Vierte verticale Kolumne				
Erste horizontale Kolumne	a	b	c	*	*	a	c	b	*	*	a	c	*	b	*	a	c	*	*	b
	a	b	*	c	*	a	*	b	c	*	a	*	c	b	*	a	*	c	*	b
	a	b	*	*	c	a	*	b	*	c	a	*	*	b	c	a	*	*	c	b
Zweite horizontale Kolumne	b	a	c	*	*	c	a	b	*	*	c	a	*	b	*	c	a	*	*	b
	b	a	*	c	*	*	a	b	c	*	*	a	c	b	*	*	a	c	*	b
	b	a	*	*	c	*	a	b	*	c	*	a	*	b	c	*	a	*	c	b
Dritte horizontale Kolumne	b	c	a	*	*	c	b	a	*	*	c	*	a	b	*	c	*	a	*	b
	b	*	a	c	*	*	b	a	c	*	*	c	a	b	*	*	c	a	*	b
	b	*	a	*	c	*	b	a	*	c	*	*	a	b	c	*	*	a	c	b
Vierte horizontale Kolumne	b	c	*	a	*	c	b	*	a	*	c	*	b	a	*	c	*	*	a	b
	b	*	c	a	*	*	b	c	a	*	*	c	b	a	*	*	c	*	a	b
	b	*	*	a	c	*	b	*	a	c	*	*	b	a	c	*	*	c	a	b
Fünfte horizontale Kolumne	b	c	*	*	a	c	b	*	*	a	c	*	b	*	a	c	*	*	b	a
	b	*	c	*	a	*	b	c	*	a	*	c	b	*	a	*	c	*	b	a
	b	*	*	c	a	*	b	*	c	a	*	*	b	c	a	*	*	c	b	a

Nämlich aus jeder Verſetzung der angeführten Tafel des §. 14. Num. 5. entſtehen $(q-2)$ neue Verſetzungen; da es nun daſelbſt $q\,(q-1)$ Verſetzungen giebt, wie erwieſen worden iſt; ſo iſt die Anzahl aller Verſetzungen in der hier gegebenen Tafel $= q\,(q-1)\,(q-2)$.

2) Die *erſte horizontale Kolumne* dieſer Tafel enthält $(q-1)\,(q-2)$ Glieder, deren jedes aus q Fällen zuſammengeſetzt iſt, und wo allezeit wenigſtens der Fall a, ſeine ihm angewieſene Stelle einnimmt.

Die *zweite horizontale Kolumne* enthält $(q-2)$ Glieder, jedes aus q Fällen beſtehend, wo c die ihm angewieſene dritte Stelle einnimmt; nämlich:

b a c * * etc.	———	———	———	
———	———	* *a c b* * etc.	* *a c* * *b* etc.	etc.
———	———	———	———	
etc.	etc.	etc.	etc.	

Die *vierte horizontale Kolumne* enthält $(q-3)$ Glieder, wo c die dritte Stelle einnimmt, dasjenige ausgenommen, welches daſelbſt in der zweiten ſenkrechten Kolumne befindlich iſt: * *b c a* *; nämlich:

———	———	———	———	
b * *c a* *	———	———	———	
———	———	———	* * *c a b*	etc.
etc.	etc.	etc.	etc.	

Mit der *fünften* und *allen darauf folgenden horizontalen Kolumnen* iſt es eben ſo beſchaffen; daſs es alſo, von der vierten horizontalen Kolumne an, $(q-3).(q-3)$ Glieder, jedes von q Fällen, giebt, wo c allezeit die ihm angewieſene dritte Stelle einnimmt, dasjenige in der zweiten ſenkrechten Kolumne allemal abgerechnet.

In der *zweiten ſenkrechten*, und zugleich in der *dritten*, *vierten*, *fünften u. ſ. f. horizontalen Kolumne* ſind $(q-2).(q-2)$ Glieder, jedes von q Fällen vorhanden,

und in jedem derselben nimmt der Fall b allezeit die ihm angewiesene zweite Stelle ein.

Man vergleiche hiemit die Tafel des folgenden §. 21. Num. 1. für $q = 7$. Demnach ist die Anzahl der Glieder, wo a, b und c die ihnen angewiesenen Stellen einnehmen =

$$(q-1).(q-2)+(q-2)+(q-3)^2+(q-2)^2$$
$$=(q-1)(q-2)+(q-2)+(q-3).(q-2-1)+(q-2)^2$$
$$=(q-1)(q-2)+(q-2)+(q-3).(q-2)-(q-2)+1+(q-2)^2$$
$$=(q-2).((q-1)+1+(q-3)-1+(q-2))+1$$
$$=(q-2).((q-2)+(q-2)+(q-2))+1$$
$$=3.(q-2)^2+1.$$

3) Subtrahirt man diese eben gefundene Zahl $3(q-2)^2+1$ von der Anzahl aller Glieder, welche die beigefügte Tafel enthält, und deren Zahl $q.(q-1).(q-2)$ ist (Num. 1); so erhält man

$$q(q-1)(q-2)-3(q-2)^2-1,$$

das ist die Menge der gleich möglichen Arten, auf welche sich die drei Fälle: a, b und c zugleich also ereignen können, dass keiner an seiner Stelle zum Vorschein kommt.

Es ist auch $3(q-2)^2+1=(3q-6)(q-2)+1=(3(q-1)-3)(q-2)+1=3(q-1)(q-2)-3(q-2)+1$, folglich $q(q-1)(q-2)-3(q-2)^2-1=1.q(q-1)(q-2)-3.(q-1)(q-2)+3.(q-2)-1$; auf ähnliche Art ausgedrükt, wie die Menge der gleich möglichen Arten, auf welche sich die zwei Fälle a und b ereignen können, so dass keiner an seiner Stelle erscheinet, §. 14. Num. 8: $1.q.(q-1)-2.(q-1)+1$. Nämlich die Zahlenkoëfficienten:

1, 2, 1

1, 3, 3, 1

folgen in beiden Formeln dem Gesetze der *Binomialkoëf-*

ficienten *), und die Aehnlichkeit der übrigen Faktoren, nebst der Abwechselung der Zeichen vor den einzelnen Gliedern fällt in die Augen. Man vergleiche auch die allgemeine Formel, welche in §. 7. gefunden worden ist.

4) Die Verbindungen der n ausgesonderten Fälle: a, b, c, d, f, etc. nach dreien sind folgende:

$a\ b\ c$
$a\ b\ d$ $a\ c\ d$
$a\ b\ f$ $a\ c\ f$ $a\ d\ f$
etc. etc. etc. etc.

$b\ c\ d$
$b\ c\ f$ $b\ d\ f$
etc. etc. etc.

$c\ d\ f$
etc. etc.

ete.

und die Anzahl dieser Verbindungen ist $= \frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}$.

Da sich nun dasjenige, was bisher (Num. 1 - 3) bei den drei bestimmten Fällen: a, b und c untersucht worden ist, auf eine jede solche Conternation anwenden läſst; so erhellet, daſs die Anzahl aller gleich möglichen Arten ist, auf welche je drei allein von den ausgesonderten Fällen sich ereignen können, so daſs keiner an der ihm angewiesenen Stelle zum Vorschein kommt, $=$
$^nD.(q(q-1)(q-2)-3(q-2)^2-1)$.

5) Wenn sich aber eine von diesen (Num. 4.) gefundenen Arten, es sei welche es wolle, ereignet; so können $q-3$ von den $m-n$ nicht ausgesonderten Fällen, die noch übrigen $q-3$ Plätze auf $(m-n).(m-n-1)\ldots(m-n-q+4)$ Arten einnehmen.

*) *Kästners* Analysis endlicher Gröſsen §. 117.

6) Folglich iſt die geſuchte Anzahl der gleich möglichen Arten, auf welche je drei allein von den ausgeſonderten Fällen ſich ereignen können, ſo daſs keiner ſich an ſeiner Stelle ereignet, =

$$^{n}D.(q(q-1).(q-2)-3.(q-2)^2-1).(m-n)....(m-n-q+4).$$

Und die geſuchte Wahrſcheinlichkeit:

$$\frac{n.(n-1).(n-2)}{1.2.3}.\left\{\begin{matrix}+1.(q-2)(q-1)q\\ -3.(q-2)(q-1)\\ +3.(q-2)\\ -1\end{matrix}\right\}\times$$

$$\frac{(m-n)(m-n-1)......(m-n-q+4)}{m(m-1)....(m-q+1)}.$$

W. Z. E.

§. 21. *

Lehrsatz. *Wenn ſich juſt vier Fälle von den n ausgeſonderten Fällen zugleich ereignen ſollen, ſo daſs keiner an ſeiner Stelle ſich ereignet: ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit dieſer Begebenheit* =

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}.\left\{\begin{matrix}1.(q-3)(q-2)(q-1)q\\ -4.(q-3)(q-2)(q-1)\\ +6.(q-3)(q-2)\\ -4.(q-3)\\ +1\end{matrix}\right\}\times$$

$$\frac{(m-n)(m-n-1)........(m-n-q+5)}{m(m-1)......(m-q+1)}.$$

Beweis. 1) Beigefügte Tafel enthält für $q=7$, $q.(q-1).(q-2)=7.6.5=210$ Glieder, davon jedes Glied aus q oder ſieben Fällen beſtehet; und zeigt auch an, auf wie viel Arten ſich juſt die drei beſtimmten Fälle: *a*, *b*, *c* von den *n* beſonders ausgewählten Fällen ereignen können, wenn ſich überhaupt q Fälle von der Anzahl *m* aller Fälle ereignen ſollen.

2) Kommt ein vierter Fall, *d*, hinzu; ſo entſpringen aus jedem Gliede dieſer Tafel $q-3$ oder 4 neue Glie-

E L

c
*
*
*
*
a
a
a
a
a
*
c
*
*
*
*

Glieder: dafs alfo bei vier fich ereignenden Fällen *a*, *b*, *c*, *d*, von den *n* ausgefonderten Fällen die neue Tafel $q(q-1)(q-2)(q-3)$ oder $7.6.5.4=840$ Glieder bekommen wird, davon jedes aus *q* Fällen beftehet.

3) Wir wollen nun unterfuchen, wie viel Glieder in diefer neuen Tafel, welche aus der beigefügten entfpringet, vorhanden find, in welchen *a*, *b*, *c* und *d* die ihnen angewiefenen Stellen einnehmen; die Anzahl diefer Glieder von der Anzahl aller Glieder, welche diefe neue Tafel enthält, und in Num. 2. angegeben worden ift, abgerechnet, erhält man die Menge der Glieder, wo die vier Fälle *a*, *b*, *c*, *d* zugleich erfcheinen, aber keiner an feinem Orte befindlich ift. Zu dem Ende werden wir die im vorigen §. 20. Num. 1. angenommene Bezeichnung der *verticalen* und *horizontalen Kolumnen* der Tafel auch hier beibehalten.

4) Aus der *erften horizontalen Kolumne* entftehen, wenn *d* hinzukommt, $(q-1)(q-2)(q-3)$ neue Glieder, und in jedem derfelben nimmt *a* die gehörige Stelle ein. Denn aus jedem Gliede entfpringen $(q-3)$ Glieder, und die erfte horizontale Kolumne enthält $(q-1)(q-2)$ Glieder, folglich giebt das Produkt $(q-1)(q-2)(q-3)$ die Anzahl der Glieder, die aus der erften horizontalen Kolumne entftehen, wenn noch ein vierter Fall hinzukommt.

5) Die *zweite verticale Kolumne* enthält $(q-2)(q-2)$ Glieder, in welchen *b* die zweite Stelle einnimmt. Da nun aber, wenn der Fall *d* hinzukommt, aus jedem Gliede $(q-3)$ neue Glieder entfpringen, fo ift, bei vier Fällen, die Summe der Glieder, wo *b* die gehörige Stelle einnimmt, $=(q-2)^2(q-3)$.

Untersuchung der ersten verticalen Kolumne.

a) *des Fachs derfelben in der zweiten horizontalen Kolumne.*

6) Aus dem Gliede *b a c* * * * * entftehen, wenn ein vierter Fall *d* hinzukommt, $(q-3)$ neue Glieder, in

welchen c an seiner Stelle sich befindet.

Aus dem Gliede $\left\{\begin{matrix} b\,a * * c * * \\ b\,a * * * c * \\ b\,a * * * * c \end{matrix}\right\}$ entspringt $\left\{\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right\}$ Glied,

wo d an seiner Stelle eintrift, und dieses geht durch $(q-4)$ Glieder fort, dass also die Summe dieser *Einsen* $= q-4$ beträgt.

b) *des Fachs in der dritten horizontalen Kolumne.*

Hieraus entspringen $q-3$ Glieder, in welchen der hinzugekommene Fall d an seiner Stelle ist.

c) *des Fachs in der vierten horizontalen Kolumne.*

Aus ihm entstehen $q-3$ Glieder, in welchen c die dritte Stelle einnimmt.

d) *Des Fachs in der fünften horizontalen Kolumne.*

Man bekömmt $q-3$ Glieder, in welchen c; und $q-4$ Glieder, in welchen d die gehörige Stelle einnimmt.

e) *des Fachs in der 6ten, 7ten, u. s. f. bis qten horizontalen Kolumne.*

Aus jedem Fache entspringen, wie beim nächstvorhergehenden, $q-3$ Glieder, in welchen c; und $q-4$ Glieder, in welchen d die angewiesene Stelle einnimmt.

Untersuchung des Fachs der zweiten verticalen Kolumne in der zweiten horizontalen Kolumne.

7) *Aus demselben entspringen $q-3$ Glieder, wo d an seiner Stelle ist.*

Untersuchung der dritten verticalen Kolumne.

a) *des Fachs in der zweiten horizontalen.*

8) Es giebt $q-3$ Glieder, wo c an seiner Stelle ist.

b) *des Fachs in der dritten und vierten horizontalen Kolumne.*

Aus keinem entspringen Glieder, in welchen die Fälle a, b, c, d an ihrer Stelle sich befinden.

c) *des Fachs in der fünften, sechsten, siebenten u. s. f. bis qten horizontalen Kolumne.*

Aus jedem Fache entstehen $q-3$ Glieder, wo d die gehörige Stelle einnimmt.

Folglich entspringen, wenn ein vierter Fall d hinzukommt, aus den Fächern der dritten verticalen Kolumne, dasjenige Fach, welches in der ersten horizontalen Kolumne befindlich ist, davon abgerechnet, $(q-3)(q-3)$ *neue Glieder, wo entweder c oder d die ihnen angewiesenen Stellen einnehmen.*

Untersuchung der vierten verticalen Kolumne.

a) *des Fachs in der zweiten horizontalen Kolumne.*

9) Es giebt $q-3$ wo c; und $q-4$ Glieder, wo d an seiner Stelle ist.

b) *des Fachs in der dritten, vierten, fünften, ... qten horizontalen Kolumne.*

Aus jedem Fache erhält man $q-3$ Glieder, in welchen entweder d oder c die gehörige Stelle einnimmt.

Folglich entspringen, wenn ein vierter Fall d hinzukommt, aus dem Fache der vierten verticalen Kolumne in der zweiten horizontalen, $q-4$ *neue Glieder, wo d an seiner Stelle sich befindet.*

Untersuchung der fünften, sechsten, bis $(q-1)^{ten}$ verticalen Kolumne.

a) *der in der zweiten horizontalen Kolumne befindlichen Fächer.*

10) Aus jedem Fache entspringen $q-3$ Glieder wo c, und $q-4$ Glieder wo d die ihm angewiesene Stelle einnimmt.

b) *der in der dritten horizontalen Kolumne befindlichen Fächer.*

Aus jedem Fache entstehen $q-3$ Glieder, wo d die gehörige Stelle einnimmt.

c) *der in der vierten horizontalen Kolumne befindlichen Fächer.*

Aus jedem Fache entstehen $q-3$ Glieder, wo c die gehörige Stelle einnimmt.

d) *der in der fünften, sechsten, siebenten u. s. f. bis qten horizontalen Kolumne befindlichen Fächer.*

Jedes Fach giebt $q-3$ Glieder, wo c, und $q-4$ Glieder, wo d an seiner Stelle vorkommt.

11) Vergleicht man nun die verticalen Reihen, die erste, vierte, fünfte, sechste, u. s. f. bis $(q-1)$te mit einander, so findet man (aus Num. 6, 9 und 10) dass aus jeder verticalen Reihe $(q-3)(q-1)$ Glieder entstehen, wo entweder c die dritte, oder d die vierte Stelle einnimmt. Folglich ist die sämmtliche Anzahl dieser Glieder $= (q-3)(q-1).(q-3)$, weil es $q-3$ dergleichen verticale Reihen giebt.

12) Vergleicht man ferner die verticalen Reihen, die erste, fünfte, sechste, u. s. f. $(q-1)$te mit einander, so bekömmt man (Num. 6 und 10) aus jeder verticalen Reihe $(q-4)(q-3)$ Glieder, in welchen der Fall d die ihm angewiesene Stelle einnimmt; nun sind $q-4$ solche verticale Reihen, also ist die Menge aller dieser Glieder $= (q-4)(q-3).(q-4)$.

13) Demnach ist die gesuchte Anzahl der Glieder (Num. 3) in der neuen Tafel, welche aus der beigefügten entstehet, und worin die vier Fälle: a, b, c, d, die ihnen angewiesenen Stellen einnehmen (Num. 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12) =

$$(q-1)(q-2)(q-3)+(q-2)^2(q-3)+(q-3)+(q-3)^2+(q-4)+(q-3)^2(q-1)+(q-4)^2(q-3) = 4(q-1)(q-2)(q-3)-6(q-2)(q-3)+4(q-3)-1.$$

14) Oder, wenn man die Glieder, wo a, b, c, d am gehörigen Orte sich befinden, horizontal summirt, so hat man:

$$(q-1)(q-2)(q-3)+(q-2)^2(q-3)+(q-3)(q-1)+ (q-4)(q-3)+2(q-3)^2+(q-4)(q-3)(q-2)+(q-4)^3= 4(q-1)(q-2)(q-3)-6(q-2)(q-3)+4(q-3)-1$$

wie vorhin in Num. 13.

15) Alſo iſt die Anzahl der Glieder, wo a, b, c, d beiſammen ſind, aber keiner an ſeinem Orte befindlich iſt, =

$$1.(q-3)(q-2)(q-1)q-4.(q-3)(q-2)(q-1) +6.(q-3)(q-2)-4.(q-3)+1.$$

Auch hier folgen die Zahlenkoëfficienten dem Geſetze der Binomialkoëfficienten: 1, 4, 6, 4, 1. Man vergleiche *vorhergeh.* §. 20. Num. 3.

16) Die Menge der Verbindungen von n Fällen nach 4 iſt $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$, womit alſo die in Num. 15. gefundene Zahl gevielfältigt werden muſs, um die ganze Menge der Ordnungen zu erhalten, wo je vier Fälle beiſammen ſind, aber keiner an ſeiner Stelle befindlich iſt.

17) Das eben (in 16) gefundene Produkt wird nun mit $(m-n)(m-n-1) \ldots\ldots (m-n-q+5)$ multiplicirt. Vergleiche *vorhergeh. §. 20. Num 5, 6.* So bekömmt man den Zähler der geſuchten Wahrſcheinlichkeit. Der Nenner derſelben iſt $m(m-1) \ldots\ldots (m-q+1)$. Folglich iſt die geſuchte Wahrſcheinlichkeit =

$$^{n}E. \left\{ \begin{array}{l} 1.(q-3)\ldots\ldots q \\ -4.(q-3)\ldots\ldots(q-1) \\ +6.(q-3)(q-2) \\ -4(q-3) \\ +1 \end{array} \right\} . \frac{(m-n)\ldots(m-n-q+5)}{m \ldots\ldots (m-q+1)}. \quad W.Z.E.$$

§. 22.*

Zusatz. Sollen von den ausgeſonderten Fällen, 5, 6, u. ſ. f. Fälle allein, aber nicht ein einziger an ſeiner Stelle ſich ereignen: ſo wird die Wahrſcheinlichkeit

dieſer Begebenheit ſein (man vergleiche §. 13, 10, 15, 20, 21):

$$\frac{n.(n-1).(n-2).(n-3).(n-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}.\left\{\begin{array}{l} 1.(q-4)(q-3)(q-2)(q-1)q \\ -5.(q-4)(q-3)(q-2)(q-1) \\ +10.(q-4)(q-3)(q-2) \\ -10.(q-4)(q-3) \\ +5.(q-4) \\ -1 \end{array}\right\}\times$$

$$\frac{(m-n)(m-n-1)\ldots\ldots(m-n-q+6)}{m(m-1)\ldots\ldots(m-q+1)};$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}.\left\{\begin{array}{l} 1.(q-5)(q-4)(q-3)(q-2)(q-1)q \\ -6.(q-5)(q-4)(q-3)(q-2)(q-1) \\ +15.(q-5)(q-4)(q-3)(q-2) \\ -20.(q-5)(q-4)(q-3) \\ +15.(q-5)(q-4) \\ -6.(q-5) \\ +1 \end{array}\right\}\times$$

$$\frac{(m-n)\ldots\ldots\ldots\ldots(m-n-q+7)}{m(m-1)\ldots\ldots(m-q+1)};$$

u. ſ. w.

§. 23.

Hieraus erſiehet man, daſs überhaupt im gegenwärtigen Falle §. 7, die Anzahl der gleich möglichen Arten, auf welche juſt eine Anzahl r von den n ausgeſonderten Fällen ſich ereignen kann, ſo daſs keiner von dieſen r Fällen an der ihm angewieſenen Stelle ſich ereignet, folgende iſt:

$${}^nR.\left\{\begin{array}{l} 1.(q-r+1)\ldots.q \\ -r.(q-r+1)\ldots.(q-1) \\ +{}^rC.(q-r+1)\ldots(q-2) \\ - \\ +.\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}.(m-n)\ldots.(m-n-q+r+1).$$

§. 24.

Beispiel. Aus einem Haufen von zehn verschiedenen Karten soll man blindlings acht Blätter hinter einander je eins auf einmal herausziehen, da einem jeden von sechs gegebenen Blättern aus diesem Haufen eine besondere Stelle angewiesen worden ist. Man verlangt zu wissen, auf wie viel gleich mögliche Arten unter den acht herausgezogenen Blättern sich weder mehr noch weniger als vier von den ausgesonderten sechs Blättern befinden können, so daſs nicht ein einziges von diesen sechs Blättern an der ihm angewiesenen Stelle herausgezogen werde.

Dieses zu finden, setze man in der allgemeinen Formel, die im vorhergehenden §. 23. gegeben worden ist, $m = 10$, $n = 6$, $q = 8$, $r = 4$, so verwandelt sie sich in

$$\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}.\left\{\begin{array}{l}1.5.6.7.8\\-4.5.6.7\\+6.5.6\\-4.5\\+1\end{array}\right\}.4.3.2.1 = 360\ 360]$$

welches die gesuchte Zahl ist.

§. 25.

ZUSATZ. Wenn überhaupt m die Anzahl aller möglichen Fälle anzeigt, die von einem gegebenen Zustande abhängen; n dieser Fälle hinter einander genannt werden, indem einem jeden eine gewisse Stelle angewiesen wird; und wenn sich q Fälle von den gegebenen m Fällen je einer auf einmal ereignen sollen: so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs sich just r von den n besonders ausgewählten Fällen ereignen werden, so daſs nicht ein einziger an den ihm angewiesenen Orte zum Vorschein kommt:

$$
{}^{n}R.\left\{\begin{array}{l}
1.(q-r+1)(q-r+2)\ldots(q-2)(q-1)q \\
-r.(q-r+1)(q-r+2)\ldots(q-2)(q-1) \\
+{}^{r}C.(q-r+1)(q-r+2)\ldots(q-2) \\
- \\
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\pm{}^{r}C.(q-r+1)(q-r+2) \\
\mp r.(q-r+1) \\
\pm 1
\end{array}\right\}\times\frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-q+r+1)}{m(m-1)\ldots(m-q+1)}
$$

wo ſich die Reihe mit $+1$ oder -1 endigt, je nachdem r eine gerade oder ungerade Zahl bedeutet. Denn der Zähler dieſer Wahrſcheinlichkeit iſt offenbar die allgemeine Formel, welche §. 23. gefunden worden, und der Nenner iſt $m\ldots(m-q+1)$ (§. 2.).

§. 26.

Beiſpiel. Von zehn gegebenen Kartenblättern nenne man ſechs in folgender beſtimmten Ordnung hinter einander: Pik-As die dritte, Pik-Dame die vierte, Tref-König die fünfte, Koeur-Dame die ſechſte, Kareau-Bube die ſiebente, Koeur-König die achte. Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs, wenn acht von dieſen zehn Karten, je eine auf einmal gezogen werden, darunter ſich juſt vier von den genannten Blättern befinden, ſo daſs keine davon an der ihr angewieſenen Stelle zum Vorſchein kommt?

Man ſetze in der im vorhergehenden §. 25. gefundenen allgemeinen Formel $m=10$, $n=6$, $q=8$, $r=4$; ſo erhält man die geſuchte Wahrſcheinlichkeit =

$$
\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}.\left\{\begin{array}{l}
1.5.6.7.8 \\
-4.5.6.7 \\
+6.5.6 \\
-4.5 \\
+1
\end{array}\right\}.\frac{4.3.2.1}{10.9.8.7.6.5.4.3}=\frac{360360}{1814400}=\frac{1001}{5010}.
$$

§. 27.

Wenn $n=q$ ist, so verwandelt sich die allgemeine Formel (§. 25.) in

$$\frac{n\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r}\cdot\left\{\begin{array}{l}1.(n-r+1)\ldots n\\ -r.(n-r+1)\ldots(n-1)\\ +\dfrac{r.(r-1)}{1.2}.(n-r+1)\ldots(n-2)\\ -+\ldots\ldots\\ \pm 1\end{array}\right\}\times\frac{(m-n)\ldots\ldots(m-2n+r+1)}{m\ldots\ldots(m-n+1)}.$$

Zum Beispiel. Aus zehn verschiedenen Karten hat man acht ausgesondert, indem man einer jeden eine bestimmte Stelle angewiesen, und aus den zehn gegebenen Blättern sollen acht hinter einander blindlings herausgezogen werden; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den acht gezogenen sich just sechs von den ausgesonderten Blättern befinden werden, so dass kein einziges die ihm angewiesene Stelle einnimmt, =

$$\frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6}\cdot\left\{\begin{array}{l}1.3.4.5.6.7.8\\ -6.3.4.5.6.7\\ +15.3.4.5.6\\ -20.3.4.5\\ +15.3.4\\ -6.3\\ +1\end{array}\right\}\cdot\frac{2.1}{3.4.5.6.7.8.9.10}=\frac{9403}{32400}.$$

§. 28.

Wenn $n=r$, so verwandelt sich die allgemeine Formel in

$$\left\{\begin{array}{l}1.(q-n+1)\ldots q\\ -n.(q-n+1)\ldots(q-1)\\ +\dfrac{n.(n-1)}{1.2}.(q-n+1)\ldots(q-2)\\ -+\ldots\ldots\ldots\\ \pm 1\end{array}\right\}:m(m-1)\ldots(m-n+1).$$

Wenn also (im vorhergehenden Beispiel §. 27.) sechs Blätter ausgesondert worden; so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs unter den acht gezogenen sich alle sechs befinden werden, so daſs keine diejenige Stelle einnimmt, welche ihr angewiesen worden ist, =

$$\left\{\begin{array}{l} 1.3.4.5.6.7.8 \\ -6.3.4.5.6.7 \\ +15.3.4.5.6 \\ -20.3.4.5 \\ +15.3.4 \\ -6.3 \\ +1 \end{array}\right\}.10.9.8.7.6.5 = \frac{9403}{151400}.$$

§. 29.

Ist $q = n = r$, so verwandelt sich die allgemeine Formel in

$$\left\{\begin{array}{l} 1.1.2\ldots\ldots q \\ -q.1.2\ldots\ldots(q-1) \\ +\dfrac{q.(q-1)}{1\;.\;2}.1.2\ldots.(q-2) \\ -+\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\} : m(m-1)\ldots.(m-q+1) =$$

$$\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \ldots. \pm \frac{1}{1.2\ldots.q}\right).\frac{1.2\ldots.q}{m(m-1)\ldots.(m-q+1)}.$$

So ist, wenn man von zehn verschiedenen Karten acht, eine nach der andern, nennet, einer jeden davon eine bestimmte Stelle anweiset, und aus den zehn gegebenen Karten acht hinter einander herausziehet, die Wahrscheinlichkeit, daſs die acht herausgezogenen Karten die acht genannten sein werden, so daſs nicht eine einzige die ihr angewiesene Stelle einnimmt, =

$$\left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \ldots. + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8}\right):45 = \frac{2119}{259200}.$$

§. 30.

Für $m = q$ und $r = n$ verwandelt sich die allgemeine Formel in

$$\left\{\begin{matrix} 1.(m-n+1)\ldots m \\ -n.(m-n+1)\ldots(m-1) \\ +\frac{n.(n-1)}{1.2}.(m-n+1)\ldots(m-2) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{matrix}\right\} : m(m-1)\ldots(m-n+1) =$$

$$1-n.\frac{1}{m}+{}^nC\frac{1}{m(m-1)}-{}^nD.\frac{1}{m(m-1)(m-2)}+-\ldots\pm\frac{1}{m(m-1)\ldots(m-n+1)}.$$

Zum Beiſpiel. Es ſind zehn verſchiedene Karten gegeben, drei davon nennet man eine nach der andern, und giebt jeder eine beſtimmte Stelle, hierauf ziehet man blindlings die zehn gegebenen Karten, je eine auf einmal: ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs keine von den drei genannten Karten an ihrer Stelle herausgezogen werden wird

$$\left\{\begin{matrix} 1.8.9.10 \\ -3.8.9 \\ +3.8 \\ -1 \end{matrix}\right\} : 10.9.8 = 1-3.\frac{1}{10}+3.\frac{1}{10.9}-\frac{1}{10.9.8}=\frac{527}{720}.$$

§. 31.

Setzt man $m = q = n = r$, ſo giebt die allgemeine Formel

$$\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-\ldots\pm\frac{1}{1.2.3\ldots m}.$$

Z.B. Wenn man dreizehn gegebene Kartenblätter eins nach dem andern nennet, und bei jedem Blatte, das man nennet, eins aus den dreizehn gegebenen Blättern blindlings herausziehet, ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs keine der herausgezogenen Karten diejenige ſein wird, welche man eben zuvor genannt hat, =

$$\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-\ldots-\frac{1}{1.2.3\ldots11.12.13}=\frac{63633137}{172972800}.$$

§. 32.

Für $r=0$ wird die allgemeine Formel

$$\frac{(m-n)(m-n-1)\ldots\ldots(m-n-q+1)}{m(m-1)\ldots\ldots(m-q+1)};$$ (Man sehe §. 13.).

§. 33.

Aufgabe. *Es bleiben die Voraussetzungen, wie sie §. 7. gemacht worden sind. Man sucht, auf wie viel gleich mögliche Arten keiner von den n besonders ausgewählten Fällen an der ihm angewiesenen Stelle sich ereignen kann.*

Auflösung. Die gesuchte Zahl ist die Summe aller gleich möglichen Arten, auf welche sich just 0, 1, 2, 3, 4, ... r, ... $(n-2)$, $(n-1)$, n von den n ausgesonderten Fällen ereignen können, ohne dass einer an der ihm angewiesenen Stelle sich ereignet. Also ist (aus §. 23.) die gesuchte Zahl folgende Reihe:

$$\begin{aligned}
&{}^nA.[1].(m-n)(m-n-1)\ldots\ldots(m-n-q+1)\\
&+{}^nB.\begin{Bmatrix}1.q\\-1\end{Bmatrix}.(m-n)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(m-n-q+2)\\
&+{}^nC.\begin{Bmatrix}1.(q-1)q\\-2(q-1)\\+1\end{Bmatrix}.(m-n)\ldots\ldots(m-n-q+3)\\
&+{}^nD.\begin{Bmatrix}1.(q-2)(q-1)q\\-3.(q-2)(q-1)\\+3.(q-2)\\-1\end{Bmatrix}.(m-n)\ldots\ldots(m-n-q+4)\\
&+\;.\\
&+{}^nA.\begin{Bmatrix}{}^nA.(q-n+1)\ldots\ldots q\\-{}^nB.(q-n+1)\ldots\ldots(q-1)\\+{}^nC.(q-n+1)\ldots\ldots(q-2)\\-+\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\\\pm{}^nA\end{Bmatrix}.(m-n)\ldots\ldots(m-q+1);
\end{aligned}$$

W. Z. F.

§. 34.

Beispiel. Es ſind zehn Karten gegeben, davon werden ſechs ausgeſondert, ſo daſs man einer jeden eine beſtimmte Stelle anweiſet.

Aus den zehn gegebenen Karten ſoll man acht blindlings, eine nach der andern, herausziehen: Man verlangt zu wiſſen, auf wie viel gleich mögliche Arten es geſchehen könne, daſs ſich keine von den ſechs ausgeſonderten Karten an der ihr angewieſenen Stelle ereignen werde?

Man ſetze in der eben gefundenen allgemeinen Formel $m = 10$, $n = 6$, $q = 8$; ſo bekömmt man die geſuchte Zahl =

$$\frac{6\cdot5}{1\cdot2}\cdot\left\{\begin{array}{l}1\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\\-4\cdot5\cdot6\cdot7\\+6\cdot5\cdot6\\-4\cdot5\\+1\end{array}\right\}\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$$

$$+6\cdot\left\{\begin{array}{l}1\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\\-5\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\\+10\cdot4\cdot5\cdot6\\-10\cdot4\cdot5\\+5\cdot4\\-1\end{array}\right\}\cdot4\cdot3\cdot2$$

$$+1\cdot\left\{\begin{array}{l}1\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\\-6\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\\+15\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\\-20\cdot3\cdot4\cdot5\\+15\cdot3\cdot4\\-6\cdot3\\+1\end{array}\right\}\cdot4\cdot3 = 982812. \text{*)}$$

*) Es befinden ſich nämlich wenigſtens vier von den ſechs ausgewählten unter den acht gezogenen Blättern; Denn, daſs juſt drei, oder zwei, oder eins, oder o darunter ſind, iſt nicht möglich. Derowegen muſs die allgemeine Formel (§. 33.) nur drei mögliche Glieder geben. *Anm. des Ueberſ.*

§. 35.

Zusatz. 1. Wenn wiederum die Voraussetzungen bleiben, wie sie (§. 7.) gemacht worden sind; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass entweder keiner oder wenigstens einer von den n ausgewählten Fällen, keiner aber an der ihm angewiesenen Stelle sich ereignen wird, =

$$\Bigg(1 \,.\, [1] \,.\, (m-n) \,.\,.\,.\,.\,.\, (m-n-q+1)$$

$$+\, n \,.\, \left\{ \begin{array}{l} 1 \,.\, q \\ -1 \end{array} \right\} (m-n) \,.\,.\,.\,.\, (m-n-q+2)$$

$$+\, {}^{n}C \,.\, \left\{ \begin{array}{l} 1 \,.\, (q-1)\, q \\ -2 \,.\, (q-1) \\ +1 \end{array} \right\} .\, (m-n) \,.\,.\,.\,.\, (m-n-q+3)$$

$$+ \,.$$

$$+\, 1 \,.\, \left\{ \begin{array}{l} 1 \,.\, (q-n+1) \,.\,.\,.\,.\, q \\ -n \,.\, (q-n+1) \,.\,.\,.\, (q-1) \\ +{}^{n}C \,.\, (q-n+1) \,.\,.\,.\, (q-2) \\ -+ \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. \\ \pm 1 \end{array} \right\} .\, (m-n) \,.\,.\,.\, (m-q+1) \Bigg) :$$

$$m \,.\,.\,.\,.\, (m-q+1).$$

Denn der Zähler dieser Wahrscheinlichkeit ist offenbar die allgemeine Formel, welche in der Aufgabe §. 33. gefunden worden ist; und der Nenner: $m \ldots (m-q+1)$ (§. 2).

§. 36.

So ist für das (§. 34.) gegebene Beispiel, die Wahrscheinlichkeit, dass keine von den sechs ausgesonderten Karten an der ihr angewiesenen Stelle herausgezogen werden wird $= \frac{982812}{1814400} = \frac{1901}{151200}$. *)

*) Nämlich die zehn gegebenen Karten seien z. B. 1. die rothe Zehn; 2. die grüne Neun; 3. die Schellen-Acht; 4. der rothe Unter; 5. der grüne Ober; 6. der Eichel-Unter; 7. der Schellen-König; 8. der grüne König; 9. das rothe Daus; 10. das grüne Daus; und man wähle hieraus Num. 1, 3, 5, 7, 9, 10 nach der Ordnung der dabei geschriebenen Nummern: so giebt

§. 37.

Wenn $n=q$ ist, so verwandelt sich die allgemeine Formel in

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 \,.\, (1) \,.\, (m-q)(m-q-1) \ldots (m-2q+1) \\ + q \,.\, \binom{1.q}{-1} \,.\, (m-q) \ldots (m-2q+2) \\ + {}^{q}C \,.\, \left\{ \begin{array}{l} 1 \,.\, (q-1)\, q \\ -2\,(q-1) \\ +1 \end{array} \right\} . (m-q) \ldots (m-2q+3) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + 1 \,.\, \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \ldots \pm \frac{1}{1.2 \ldots q} \right) . 1.2 \ldots q \end{array} \right\} :$$

$$m\,(m-1)\,(m-2) \ldots (m-q+1).$$

Zum Beispiel. Von zehn verschiedenen Karten nenne man acht, eine nach der andern, indem man einer jeden davon eine bestimmte Stelle giebt, und ziehe blindlings hinter einander acht aus den gegebenen zehn Karten: so ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den acht gezogenen sich keine von den acht genannten Karten an der für sie bestimmten Stelle befinden wird, =

$$\left\{ \frac{8 \,.\, 7}{1 \,.\, 2} \,.\, \left\{ \begin{array}{l} 1.3.4.5.6.7.8 \\ -6.3.4.5.6.7 \\ +15.3.4.5.6 \\ -20.3.4.5 \\ +15.3.4 \\ -6.3 \\ +1 \end{array} \right\} . 2.1 + \right.$$

der Bruch $\frac{11961}{151200}$ die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens vier davon unter den acht gezogenen sein werden, aber keine von diesen vier oder fünf oder sechs herausgekommenen Karten an der ihr angewiesenen Stelle zum Vorschein kommen wird.

Anm. d. Uebers.

$$8\cdot\left\{\begin{array}{l} 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8 \\ -7\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7 \\ +21\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 \\ -35\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 \\ +35\cdot2\cdot3\cdot4 \\ -21\cdot2\cdot3 \\ +7\cdot2 \\ -1 \end{array}\right\}\cdot 2$$

$$\left.+1\cdot\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\ldots+\frac{1}{1\cdot2\ldots8}\right)\cdot1\cdot2\ldots8\right\}:$$

$$10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3=\frac{818393}{1814400}.$$

§. 38.

Wenn $m=q$ iſt, ſo wird die allgemeine Formel:

$$\left\{\begin{array}{l} {}^{n}A\,.(m-n+1)\ldots.\,m \\ -{}^{n}B\,(m-n+1)\ldots.(m-1) \\ +{}^{n}C\,.\,(m-n+1)\ldots.(m-2) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm{}^{n}A \end{array}\right\}: m(m-1)\ldots(m-n+1);$$

welches die obige (§. 30.) gefundene Formel iſt.

Zum Beiſpiel. Wenn man von zehn verſchiedenen Karten ſechs, eine nach der andern nennet, einer jeden eine beſtimmte Stelle anweiſet, und alsdann die zehn gegebenen Karten, eine nach der andern, blindlings ziehet: ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs bei dem Herausziehen keine von den ſechs genannten Karten an ihrer Stelle erſcheinen wird, =

$$\left\{\begin{array}{l} 1\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10 \\ -6\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9 \\ +15\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8 \\ -20\cdot5\cdot6\cdot7 \\ +15\cdot5\cdot6 \\ -6\cdot5 \\ +1 \end{array}\right\}:10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5=\frac{81901}{151200}.$$

§. 39.

§. 39.

Für $m=q=n$ verwandelt sich die allgemeine Formel in $\frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \ldots \pm \frac{1}{1.2.3\ldots m}$, welches die oben gefundene (§. 31.) ist.

§. 40.

Zusatz 2. Die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit von der in §. 35. oder diejenige Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens einer von den n ausgesonderten Fällen an der ihm angewiesenen Stelle sich ereignen wird, ist

$$
\begin{aligned}
1 - \Big\{ & 1.(1).(m-n)\ldots(m-n-q+1) \\
& + n.\left(\begin{matrix}1.q\\ -1\end{matrix}\right).(m-n)\ldots(m-n-q+2) \\
& + \frac{n.(n-1)}{1.2}.\left\{\begin{matrix}1.(q-1)\,q\\ -2.(q-1)\\ +1\end{matrix}\right\}.(m-n)\ldots(m-n-q+3) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& +1\left\{\begin{matrix}1.(q-n+1)\ldots\ldots q\\ -n.(q-n+1)\ldots(q-1)\\ +\frac{n.(n-1)}{1.2}.(q-n+1)\ldots(q-2)\\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \pm 1\end{matrix}\right\}.(m-n)\ldots(m-q+1)\Big\}:
\end{aligned}
$$

$m\ldots(m-q+1)$. (§. 35. u. Kap. I. §. 15.).

Und wenn $n=q$, so ist diese Wahrscheinlichkeit

$$
\begin{aligned}
1 - [& 1.(1).(m-q)\ldots(m-2q+1) \\
& + q.\left(\begin{matrix}1.q\\ -1\end{matrix}\right).(m-q)\ldots(m-2q+2) \\
& + \frac{q.(q-1)}{1.2}.\left\{\begin{matrix}1.(q-1)\,q\\ -2.(q-1)\\ +1\end{matrix}\right\}.(m-q)\ldots(m-2q+3)
\end{aligned}
$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+1.\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-\ldots\pm\frac{1}{1.2\ldots q}\right).1.2.3\ldots q]:$$

$m \ldots\ldots (m-q+1)$ (§. 37. u. Kap. I. §. 15).

Und für $m=q$ ist sie =

$$1-\left\{\begin{matrix} 1.(m-n+1)\ldots\ldots m \\ -n.(m-n+1)\ldots\ldots(m-1) \\ +\frac{n.(n-1)}{1.2}.(m-n+1)\ldots(m-2) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{matrix}\right\}:m\ldots(m-n+1).$$

(§. 38. und Kap I. §. 15).

Endlich für $m=n=q$ ist diese Wahrscheinlichkeit:

$$1-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots\pm\frac{1}{1.2.3\ldots m}.\ (§. 39.).$$

Zum Beispiel. Wenn man dreizehn gegebene Karten, eine nach der andern, nennet, und bei jedem Blatte, das man nennet, eins von den dreizehn gegebenen Karten blindlings ziehet: so ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenigstens eine von den gezogenen Karten diejenige sein wird, welche man nur genannt hat:

$$1-\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{1.2.3.4}+\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$\frac{1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13}=\frac{109339663}{172972800}\ (§.31).$$

§. 41.*

Im Zahlen-Lotto besetzt man vier Nummern zu einer bestimmten Quaterne:

Num.	37	85	36	35
die	1ste	2te	4te	5te

Man sucht die Wahrscheinlichkeit, dass 1) keine, 2) wenigstens eine, an der ihr angewiesenen Stelle herauskommt.

Hier iſt (§. 35.) $m = 90$, $n = 4$, $q = 5$ geſetzt, die Wahrſcheinlichkeit, daſs keine Nummer an der ihr angewieſenen Stelle heraus kommt, =

$$\begin{aligned}
&(1 \cdot [1] \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83 \cdot 82 \\
&+ 4 \cdot \left\{\begin{matrix} 1 \cdot 5 \\ -\ 1 \end{matrix}\right\} \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 \cdot 83 \\
&+ 6 \cdot \left\{\begin{matrix} 1 \cdot 4 \cdot 5 \\ -\ 2 \cdot 4 \\ +\ 1 \end{matrix}\right\} \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84 \\
&+ 4 \cdot \left\{\begin{matrix} 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \\ -\ 3 \cdot 3 \cdot 4 \\ +\ 3 \cdot 3 \\ -\ 1 \end{matrix}\right\} \cdot 86 \cdot 85 \\
&+ 1 \cdot \left\{\begin{matrix} 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \\ -\ 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \\ +\ 6 \cdot 2 \cdot 3 \\ -\ 4 \cdot 2 \\ +\ 1 \end{matrix}\right\} \cdot 86) : 90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Wahrſcheinlichkeit, daſs wenigſtens eine an der ihr angewieſenen Stelle herauskommen wird

$$(\S.\ 40.) = 1 - \frac{1 \cdot (1) \cdot 86 \ldots 82 + \ldots + 1 \cdot (\ldots) \cdot 86}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}.$$

§. 42.

Aufgabe. *Es bleiben die Vorausſetzungen, wie ſie §. 7. gemacht worden ſind. Man ſucht die Wahrſcheinlichkeit, daſs unter den q ſich begebenden Fällen juſt r von den n ausgeſonderten, ein jeder an ſeiner Stelle, und juſt t von den ausgeſonderten, keiner an ſeiner Stelle, ſich befinden werden.*

Auflösung. Den Zähler der geſuchten Wahrſcheinlichkeit zu erhalten, weiſs man, daſs die Anzahl der Arten, auf welche aus n ausgeſonderten Fällen, r genommen werden können, um einen jeden Fall an die Stelle zu ſetzen, die ihm angewieſen worden,

folgende ist: $\frac{n \ldots\ldots (n-r+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots r}$ (Kap. V. §. 2).

Wenn aber eine jede von diesen Arten bestimmt worden ist, so sind noch $m-r$ Fälle von der Menge aller übrig, und $q-r$ von denjenigen, welche sich noch ereignen sollen, und aus $n-r$ ausgesonderten Fällen soll man t nehmen, um einen jeden Fall anders wohin als an die ihm angewiesene Stelle zu setzen.

Wenn nun die Anzahl der gegebenen Fälle $m-r$ ist, $n-r$ die Anzahl der ausgesonderten, $q-r$ die Anzahl dererjenigen Fälle, welche sich ereignen sollen; so muss man, um zu finden, auf wie viel gleich mögliche Arten unter $q-r$ sich begebenden Fällen, just die Anzahl t von den $n-r$ ausgesonderten Fällen, keiner an seinem Orte sich ereignen soll, in der allgemeinen Formel §. 23. anstatt $m \mid n \mid q \mid r$ setzen $m-r \mid n-r \mid q-r \mid t$ wodurch sie sich verwandelt in

$$\frac{(n-r)\ldots(n-r-t+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots t} \cdot \left\{ \begin{array}{l} 1.(q-r-t+1)\ldots\ldots(q-r) \\ -t.(q-r-t+1)\ldots\ldots(q-r-1) \\ +\frac{t(t-1)}{1 \,.\, 2}.(q-r-t+1)\ldots(q-r-2) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array} \right\} \times$$

$$(m-n)\ldots\ldots(m-n-q+r+t+1)$$

Multiplicirt man diese jetzt herausgekommene Zahl mit $\frac{n \ldots\ldots (n-r+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots r}$, so wird das herauskommende Produkt der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit sein. Uebrigens ist der Nenner derselben, wie bisher, $= m \ldots\ldots (m-q+1)$. Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-r+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots r} \cdot \frac{(n-r)\ldots\ldots(n-r-t+1)}{1 \,.\, 2 \ldots\ldots t} \times$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1.(q-r-t+1)\ldots(q-r) \\ -t.(q-r-t+1)\ldots(q-r-1) \\ +\frac{t(t-1)}{1.2}.(q-r-t+1)\ldots(q-r-2) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}.\frac{(m-n)\ldots(m-n-q+r+t+1)}{m\ldots(m-q+1)}.$$

W. Z. F.

§. 43.

Beispiel. Von zehn gegebenen verſchiedenen Karten ſpreche man ſechs hinter einander aus, indem man einer jeden davon eine beſtimmte Stelle anweiſet; hierauf ziehe man acht blindlings hinter einander aus den gegebenen zehn Karten. Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs unter dieſen acht gezogenen Karten juſt drei von den ſechs ausgewählten, eine jede an ihrer Stelle, und juſt zwei von den ausgewählten, keine an ihrer Stelle, herauskommen werden?

Man ſetze in der vorigen allgemeinen Formel

anſtatt	m	q	n	r	t
hier	10	8	6	3	2

ſo erhält man die geſuchte Wahrſcheinlichkeit =

$$\frac{6.5.4}{1.2.3}.\frac{3.2}{1.2}.\left\{\begin{array}{l} 1.4.5 \\ -2.4 \\ +1 \end{array}\right\}.\frac{4.3.2}{10.9\ldots3}=\frac{13}{1260}.$$

§. 44.*

Für $m=n=q$, und alſo $t=m-r$, verwandelt ſich die allgemeine Formel in

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1.2\ldots r}.\left(\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\ldots\pm\frac{1}{1.2\ldots(m-r)}\right).$$

Iſt auch $r=0$, ſo bekömmt man die Formel §. 31. nämlich

$$\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\ldots\pm\frac{1}{1.2\ldots m}.$$

Ist in der allgemeinen Formel (§. 42.) $r = 0$, so hat man die Formel des §. 25, nur mit dem Unterschied, dass hier t anstatt r am a. O. gesetzt ist; nämlich die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn keiner von den ausgewählten Fällen sich an seinem Orte ereignet, unter den q sich begebenden just t von den n ausgewählten, keiner an seinem Orte, sich ereignen.

§. 45.*

Ist aber in der allgemeinen Formel (§. 42.) $t = 0$, so giebt sie den Ausdruk

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot r} \cdot \frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-q+r+1)}{m(m-1)\ldots(m-q+1)},$$

welcher die Wahrscheinlichkeit anzeigt, dass wenn keiner von den ausgesonderten Fällen sich anders als an seiner Stelle ereignet, unter den q sich begebenden Fällen, just die Zahl r von den n ausgesonderten, ein jeder an seinem Orte sich befinden wird. Setzt man in dieser eben gefundenen Formel $n = q$, so bekömmt man die Wahrscheinlichkeit, dass unter q sich begebenden bei eben so viel ausgesonderten Fällen, just r von den ausgesonderten, ein jeder an seinem Orte befindich ist:

$$\frac{n\ldots(n-r+1)}{1\ldots r} \cdot \frac{(m-n)\ldots(m-2n+r+1)}{m\ldots(m-n+1)}.$$

Ist $t = 0$ und $n = r$, so verwandelt sich die allgemeine Formel (§. 42.) in

$$\frac{(m-n)\ldots(m-q+1)}{m\ldots(m-q+1)} = \frac{1}{m\ldots(m-n+1)}.$$

Also hat hier die Grösse von q in die Wahrscheinlichkeit keinen Einfluss.

Wenn $t = 0$ und $q = n = r$ ist, so giebt die allgemeine Formel (§. 42.) $\frac{1}{m\ldots(m-q+1)}$; wie eben zuvor.

Ist $t=0$, $m=q$ und $r=n$, so giebt ebendieselbe

$$\frac{(m-n)\ldots.2.1}{m\ldots.2.1}=\frac{1}{m\ldots(m-n+1)}$$; wie vorhin.

Wenn aber $t=0$, und $m=q=n=r$ ist; so hat man

$$\frac{1}{1.2\ldots.m}.$$

Die Bedeutung dieser Formeln wird man verstehen. Daher wir nur die letzte durch folgendes Beispiel erläutern wollen.

Beispiel. Von dreizehn gegebenen verschiedenen Karten ziehet man eine nach der andern, und vor jedem Zuge nennet man eine derselben; so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs allezeit die unmittelbar zuvor genannte herausgezogen werden wird, $=\frac{1}{1.2.3\ldots.11.12.13}=$ $\frac{1}{6227020800}.$

Ist endlich in der allgemeinen Formel (§. 42.) $t=0$ und $r=0$, so giebt sie $\frac{(m-n)\ldots.(m-n-q+1)}{m\ldots.(m-q+1)}$ (Man sehe §. 32.)

§. 46.*

Man hat zwei Nummern des Lotto zu einer bestimmten Ambe besetzt, und verlangt die Wahrscheinlichkeit zu wissen, daſs sie beide, jede an ihrer Stelle, herauskommen.

Die Wahrscheinlichkeit, daſs beide, aber keine an ihrer Stelle herauskommen, ist $=\frac{13}{8010}$ (§. 18). Die Wahrscheinlichkeit, daſs nur eine an ihrer Stelle, und die andere nicht an ihrer Stelle herauskommt, findet man, wenn man in der allgemeinen Formel (§. 42.) $m=90$, $n=2$, $q=5$, $r=1$, $t=1$ setzt; also ist diese

$$\text{Wahrscheinlichkeit} = 2 \cdot \binom{1 \cdot 4}{-1} \cdot \frac{88 \ldots 86}{90 \ldots 86} = \frac{6}{90 \cdot 89} = \frac{6}{8010}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daſs nur eine Nummer herauskommt, ſie mag nun an ihrer Stelle oder nicht an ihrer Stelle herauskommen, iſt (Kap. V. §. 14. $m = 90$, $q = 5$, $n = 2$, $r = 1$ geſetzt) =

$$2 \cdot \frac{88 \ldots 85}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} : \frac{90 \ldots 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 85 \cdot 5}{90 \cdot 89} = \frac{850}{8010}.$$

Die Wahrscheinlichkeit, daſs keine herauskommt, iſt (Kap. V. §. 17. $m = 90$, $q = 5$, $n = 2$ geſetzt) $= \frac{88 \ldots 84}{90 \ldots 86} =$ $\frac{85 \cdot 84}{90 \cdot 89} = \frac{7140}{8010}$. Demnach iſt die geſuchte Wahrſcheinlichkeit $= 1 - \frac{13}{8010} - \frac{6}{8010} - \frac{850}{8010} - \frac{7140}{8010} = 1 - \frac{8009}{8010} =$ $\frac{1}{8010}$. (S. §. 18.)

§. 47.

Aufgabe. *Es bleiben die Vorausſetzungen, wie ſie §. 7. gemacht worden ſind. Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs unter q ſich begebenden Fällen juſt t von den ausgeſonderten, nicht an ihrer Stelle, und wenigſtens r von den ausgeſonderten an ihrer Stelle ſich ereignen werden?*

Auflösung. Man ſetze in der allgemeinen Formel (§. 42.) anſtatt r nach und nach die Zahlen r, $r+1$, $r+2$, etc. bis $n-t$, und addire die gefundenen Wahrſcheinlichkeiten: daſs juſt r, oder $r+1$, oder $r+2$, oder...., oder $n-t$ von den ausgeſonderten Fällen an ihrer Stelle, und juſt t von denſelben nicht an ihrer Stelle zum Vorſchein kommen werden, ſo erhält man die geſuchte Wahrſcheinlichkeit =

$$\left(\frac{(n-r)\ldots(n-r-t+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,t}\cdot\left\{\begin{matrix}1.(q-r-t+1)\ldots(q-r)\\ -t.(q-r-t+1)\ldots(q-r-1)\\ +{}^tC(q-r-t+1)\ldots(q-r-2)\\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \pm 1\end{matrix}\right\}\times\right.$$

$${}^nR.(m-n)\ldots(m-n-q+r+t+1)$$

$$+\frac{(n-r-1)\ldots(n-r-t)}{1\,.\,2\,\ldots\,t}\cdot\left\{\begin{matrix}1.(q-r-t)\ldots(q-r-1)\\ -t.(q-r-t)\ldots(q-r-2)\\ +{}^tC(q-r-t)\ldots(q-r-3)\\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\\ +1\end{matrix}\right\}\times$$

$${}^n[R+1].(m-n)\ldots(m-n-q+r+t+2)$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{t\ldots 2.1}{1.2\ldots t}\cdot\left\{\begin{matrix}1.(q-n+1)\ldots(q-n+t)\\ -t.(q-n+1)\ldots(q-n+t-1)\\ +{}^tC.(q-n+1)\ldots(q-n+t-2)\\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \pm 1\end{matrix}\right\}\times$$

$$\left.{}^n[N-T].(m-n)\ldots(m-q+1)\right):m\ldots(m-q+1).$$

W. Z. F.

§. 48.

Zum Beispiel. Aus zwölf gegebenen Karten wähle man acht, indem man einer jeden eine bestimmte Stelle anweiset; so wird die Wahrscheinlichkeit, dass unter zehn aus den zwölf gegebenen blindlings herausgezogenen Karten, just zwei von den acht ausgewählten, keine an ihrer Stelle, und wenigstens vier von den ausgewählten, eine jede an ihrer Stelle befindlich sein werden, gefunden, wenn man in der vorigen allgemeinen Formel $m=12$, $q=10$, $n=8$, $t=2$, $r=4$ setzt =

$$\left(\frac{4.3}{1.2}\left\{\begin{matrix}1.5.6\\ -2.5\\ +1\end{matrix}\right\}.\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}.4.3.2.1+\right.$$

$$\frac{3\cdot2}{1\cdot2}\cdot\left\{\begin{array}{l}\quad 1\cdot4\cdot5\\-2\cdot4\\+1\end{array}\right\}\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot4\cdot3\cdot2+$$

$$\frac{2\cdot1}{1\cdot2}\left\{\begin{array}{l}\quad 1\cdot3\cdot4\\-2\cdot3\\+1\end{array}\right\}\cdot\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}\cdot4\cdot3\Big):12\cdot11\ldots3=\frac{793}{12800}.$$

§. 49.

Aufgabe. *Unter ebendenselben Voraussetzungen, welche in der vorhergehenden Aufgabe und §. 7. gemacht worden sind; die Wahrscheinlichkeit zu finden, daſs unter den q sich ereignenden Fällen just t von den ausgesonderten, keiner an seiner Stelle, und höchstens r von den ausgesonderten, ein jeder an seiner Stelle, sich befinden werden.*

Auflösung. Man setze in der allgemeinen Formel §. 42. anstatt r die Zahlen $0, 1, 2 \ldots r$, und addire die herausgekommenen Produkte; so ist die Summe die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$\Bigg(\frac{n\ldots(n-t+1)}{1\cdot2\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{l}\quad 1\cdot(q-t+1)\ldots q\\-t\cdot(q-t+1)\ldots(q-1)\\+{}^{t}C\cdot(q-t+1)\ldots(q-2)\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\\\pm1\end{array}\right\}\times$$

$$(m-n)\ldots(m-n-q+t+1)+$$

$$\frac{(n-1)\ldots(n-t)}{1\cdot2\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{l}\quad 1\cdot(q-t)\ldots(q-1)\\-t\cdot(q-t)\ldots(q-2)\\+{}^{t}C\cdot(q-t)\ldots(q-3)\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\\\pm1\end{array}\right\}\times$$

$$n\cdot(m-n)\ldots(m-n-q+t+2)+$$

$$\frac{(n-2)\ldots(n-t-1)}{1\cdot2\ldots t}\cdot\left\{\begin{array}{l}\quad 1\cdot(q-t-1)\ldots(q-2)\\-t\cdot(q-t-1)\ldots(q-3)\\+{}^{t}C\cdot(q-t-1)\ldots(q-4)\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\\\pm1\end{array}\right\}\times$$

$${}^{n}C.(m-n)\ldots(m-n-q+t+r+3)+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$\frac{(n-r)\ldots(n-r-t+1)}{1.2\ldots t}.\left\{\begin{array}{l} 1.(q-r-t+1)\ldots(q-r) \\ -t.(q-r-t+1)\ldots(q-r-1) \\ +{}^{t}C.(q-r-t+1)\ldots(q-r-2) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}\times$$

$${}^{n}R.(m-n)\ldots(m-n-q+r+t+1)\Big):m\ldots(m-q+1).$$

W. Z. F.

§. 50.

Beispiel. Die Wahrscheinlichkeit, dass, wenn zwölf $(=m)$ Karten gegeben sind, unter zehn $(=q)$ davon gezogenen just zwei $(=t)$ von acht $(=n)$ ausgesonderten nicht an ihrer Stelle, und höchstens drei $(=r)$ von den acht ausgesonderten an ihrer Stelle befindlich sein werden, ist =

$$\Big(\frac{8.7}{1.2}.\left\{\begin{array}{l} 1.9.10 \\ -2.9 \\ +1 \end{array}\right\}.1.4.3.2.1.0.-1.-2.-3+$$

$$\frac{7.6}{1.2}.\left\{\begin{array}{l} 1.8.9 \\ -2.8 \\ +1 \end{array}\right\}.8.4.3.2.1.0.-1.-2+$$

$$\frac{6.5}{1.2}.\left\{\begin{array}{l} 1.7.8 \\ -2.7 \\ +1 \end{array}\right\}.\frac{8.7}{1.2}.4.3.2.1.0.-1+$$

$$\frac{5.4}{1.2}.\left\{\begin{array}{l} 1.6.7 \\ -2.6 \\ +1 \end{array}\right\}.\frac{8.7.6}{1.2.3}.4.3.2.1.0\Big):12\ldots3=0,$$

hieraus ersiehet man, dass die verlangte Begebenheit unmöglich ist.

§. 51.

Wenn man in den allgemeinen Formeln, die in den Aufgaben §. 42, 47 und 49 gefunden worden, $t=0$ setzt, so erhält man

1.

$$\frac{n \ldots (n-r+1)}{1.2 \ldots r} \cdot \frac{(m-n) \ldots (m-n-q+r+1)}{m \ldots (m-q+1)};$$

2.

$$\Big(\frac{n \ldots (n-r+1)}{1.2 \ldots r} \cdot (m-n) \ldots (m-n-q+r+1) +$$

$$\frac{n \ldots (n-r)}{1.2 \ldots (r+1)} \cdot (m-n) \ldots (m-n-q+r+2) +$$

$$\frac{n \ldots (n-r-1)}{1.2 \ldots (r+2)} \cdot (m-n) \ldots (m-n-q+r+3) + \ldots +$$

$$1 \,.\, (m-n) \ldots (m-q+1)\Big) : m \ldots (m-q+1);$$

3.

$$\Big(1.(m-n) \ldots (m-n-q+1) + n.(m-n) \ldots (m-n-q+2)$$

$$+ {}^{n}C(m-n) \ldots (m-n-q+3) + \ldots$$

$$+ {}^{n}R.(m-n) \ldots (m-n-q+r+1)\Big) : m \ldots (m-q+1);$$

welches die Wahrſcheinlichkeiten ſind, daſs, wenn keiner von den ausgeſonderten Fällen ſich anders als an der ihm angewieſenen Stelle ereignet; unter den q ſich ereignenden Fällen, die Anzahl r {juſt / wenigſtens / höchſtens} von den n ausgeſonderten Fällen, ein jeder an der ihm angewieſenen Stelle ſich befinden wird.

Und wenn man in dem erſten dieſer Ausdrüke für r alle ganze Zahlen von o bis n ſetzt, ſo hat man

4.

$$\Big(1.(m-n) \ldots (m-n-q+1) +$$

$$n\,(m-n) \ldots (m-n-q+2) +$$

$${}^{n}C.(m-n) \ldots (m-n-q+3) +$$

$${}^{n}D.(m-n) \ldots (m-n-q+4) +$$

$$\ldots +$$

$1.(m-n)\ldots.(m-q+1)\big):m\ldots.(m-q+1)$;

für die Wahrſcheinlichkeit, daſs kein Fall von den ausgeſonderten Fällen ſich anders als an der ihm angewieſenen Stelle ereignen wird; (oder, daſs entweder kein Fall von den n ausgeſonderten Fällen, oder wenigſtens einer davon an der ihm angewieſenen Stelle, zum Vorſchein kommen wird).

§. 52.

Aufgabe. *Wenn die Vorausſetzungen bleiben, wie ſie in den vorhergehenden Aufgaben gemacht worden ſind; die Wahrſcheinlichkeit zu finden, daſs unter den q ſich ereignenden Fällen juſt r von den n ausgewählten, ein jeder an der ihm angewieſenen Stelle, und* $\left[\begin{matrix}\textit{wenigſtens}\\ \textit{höchſtens}\end{matrix}\right]$ *t von den n ausgewählten, keiner an der ihm angewieſenen Stelle, vorhanden ſein werden.*

Auflösung. 1. Man ſetze in der allgemeinen Formel, welche in der Aufgabe §. 42. gefunden worden iſt, anſtatt t alle ganze Zahlen von $t, t+1, t+2,$ bis $n-r$; ſo erhält man für den erſten Fall die geſuchte Wahrſcheinlichkeit $=$

$$\frac{{}^{n}R}{m\ldots(m-q+1)}\cdot\Big({}^{n-r}T.(m-n)\ldots..(m-n-q+r+t+1)\times$$

$$\left\{\begin{matrix} 1.(q-r-t+1)\ldots.(q-r)\\ -t\,(q-r-t+1)\ldots.(q-r-1)\\ +{}^{t}C.(q-r-t+1)\ldots.(q-r-2)\\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \pm 1\end{matrix}\right\}$$

$$+{}^{n-r}[T+1].(m-n)\ldots.(m-n-q+r+t+2)\times$$

$$\left\{\begin{matrix} 1.(q-r-t)\ldots.(q-r)\\ -(t+1).(q-r-t)\ldots.(q-r-1)\\ +{}^{t+1}C.(q-r-t)\ldots.(q-r-2)\\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \pm 1\end{matrix}\right\}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+(m-n)\ldots(m-q+1).\left\{\begin{array}{l} 1.(q-n+1)\ldots(q-r) \\ -(n-r).(q-n+1)\ldots(q-r-1) \\ +{}^{n-r}C.(q-n+1)\ldots(q-r-2) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}\Bigg)$$

2.

In eben dieser allgemeinen Formel, welche §. 42. gefunden worden ist, setze man anstatt t alle ganze Zahlen von 0 bis t; so bekömmt man für den zweiten Fall die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{{}^{n}R}{m\ldots\ldots(m-q+1)}\times$$

$$\Big(1.[1].(m-n)\ldots\ldots(m-n-q+r+1)+$$

$$(n-r).\left[\begin{array}{l}1.(q-r)\\-1\end{array}\right].(m-n)\ldots\ldots(m-n-q+r+2)+$$

$${}^{n-r}C.\left\{\begin{array}{l}1.(q-r-1)(q-r)\\-2.(q-r-1)\\+1\end{array}\right\}.(m-n)\ldots(m-n-q+r+3)+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$${}^{n-r}T.\left\{\begin{array}{l}1.(q-r-t+1)\ldots(q-r)\\-t.(q-r-t+1)\ldots(q-r-1)\\+{}^{t}C.(q-r-t+1)\ldots(q-r-2)\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\\\pm 1\end{array}\right\}.(m-n)\ldots(m-n-q+r+t+1)\Big)$$

§. 53.

Wenn man in den allgemeinen Formeln, die §. 42. und §. 52. gefunden worden sind, $r=0$ setzt, so erhält man

1.

$$\frac{n\ldots(n-t+1)}{1.2\ldots t}.\left\{\begin{array}{l}1.(q-t+1)\ldots\ldots q\\-t.(q-t+1)\ldots\ldots(q-1)\\+\dfrac{t.(t-1)}{1.2}.(q-t+1)\ldots\ldots(q-2)\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\\pm 1\end{array}\right\}\times$$

$$\frac{(m-n)\ldots\ldots(m-n-q+t+1)}{m\ldots\ldots(m-q+1)};$$

2.

$$\Bigg(\frac{n\ldots(n-t+1)}{1.2\ldots t}.(m-n)\ldots(m-n-q+t+1)\times$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1.(q-t+1)\ldots q \\ -t.(q-t+1)\ldots(q-1) \\ +\frac{t(t-1)}{1.2}.(q-t+1)\ldots(q-2) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}+$$

$$\frac{n\ldots(n-t)}{1.2\ldots(t+1)}.(m-n)\ldots(m-n-q+t+2)\times$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1.(q-t)\ldots q \\ -(t+1).(q-t)\ldots(q-1) \\ +\frac{(t+1)t}{1.2}.(q-t)\ldots(q-2) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$1.(m-n)\ldots(m-q+1)\times$$

$$\left\{\begin{array}{l} 1.(q-n+1)\ldots\ldots q \\ -n.(q-n+1)\ldots(q-1) \\ +\frac{n.(n-1)}{1.2}.(q-n+1)\ldots(q-2) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{array}\right\}\Bigg):m\ldots(m-q+1).$$

3.

$$\Big(1.[1].(m-n)\ldots\ldots(m-n-q+1)+$$

$$n.\left\{\begin{array}{l} 1.q \\ -1 \end{array}\right\}(m-n)\ldots\ldots(m-n-q+2)+$$

$$\frac{n.(n-1)}{1.2}.\left\{\begin{matrix}1.(q-1)q\\-2.(q-1)\\+1\end{matrix}\right\}.(m-n)\ldots(m-n-q+3)+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$\frac{n\ldots(n-t+1)}{1.2\ldots t}.\left\{\begin{matrix}1(q-t+1)\ldots q\\-t.(q-t+1)\ldots(q-1)\\+\frac{t(t-1)}{1.2}.(q-t+1)\ldots(q-2)\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\\\pm 1\end{matrix}\right\}.$$

$$(m-n)\ldots(m-n-q+t+1)\Big):m\ldots(m-q+1)$$

welches die Wahrscheinlichkeiten sind, dass, wenn keiner von den ausgesonderten Fällen sich an der ihm angewiesenen Stelle ereignet, unter den q sich begebenden Fällen die Anzahl t $\left\{\begin{matrix}\text{just}\\\text{wenigstens}\\\text{höchstens}\end{matrix}\right\}$ von den n ausgesonderten Fällen, keiner an der ihm angewiesenen Stelle sich ereignen wird.

Und wenn man in der ersten von diesen Formeln nach und nach für t alle ganze Zahlen von 0 bis n substituirt; so bekömmt man 4. die bereits (§. 35.) gefundene Formel für die Wahrscheinlichkeit, dass keiner von den ausgesonderten Fällen an dem ihm angewiesenen Orte sich ereignen werde.

§. 54.

1) Wenn man in der allgemeinen Formel, welche in der Aufgabe (§. 47.) gefunden worden, für t nach und nach alle ganze Zahlen von $\left\{\begin{matrix}t\\0\end{matrix}\right.$ bis $\left.\begin{matrix}(n-r)\\t\end{matrix}\right\}$ setzt, und alle Produkte, welche auf diese Weise entstehen, zusammen addirt: so bekömmt man zur Summe die Wahrscheinlichkeit, dass unter denjenigen q Fällen,

wel-

welche ſich ereignen, $\left\{\begin{matrix}\text{wenigſtens}\\ \text{höchſtens}\end{matrix}\right\}$ t von den n ausgeſonderten befindlich ſein werden, ein jeder an einer andern Stelle als die ihm angewieſen worden; und wenigſtens r von den n ausgeſonderten, ein jeder an dem Orte, welcher ihm angewieſen worden iſt.

2) Setzt man in der allgemeinen Formel, welche §. 49. gefunden worden iſt, nach und nach anſtatt t alle ganze Zahlen von $\left\{\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix}\right.$ bis $\left.\begin{matrix} n \\ t \end{matrix}\right\}$, und ſummirt die ſolchergeſtalt herausgekommenen Produkte: ſo wird dieſe Summe die Wahrſcheinlichkeit ſein, daſs unter den q Fällen, welche ſich ereignen, ſich $\left\{\begin{matrix}\text{wenigſtens}\\ \text{höchſtens}\end{matrix}\right\}$ t von den n ausgeſonderten, keiner an dem ihm angewieſenen Orte; und höchſtens r von den n ausgeſonderten, ein jeder an dem ihm angewieſen Orte, befinden werden.

Man wird ebendieſelben Wahrſcheinlichkeiten erhalten, wenn man in der erſten Formel der Aufgabe §. 52. nach und nach anſtatt r alle ganze Zahlen von $\left\{\begin{matrix} r \\ 0 \end{matrix}\right.$ bis $\left.\begin{matrix} n-t \\ r \end{matrix}\right\}$ ſubſtituirt, und hierauf alle dieſe Produkte zuſammen addirt: und wenn man in der zweiten Formel eben dieſer Aufgabe (§. 52.) nach und nach für r alle ganze Zahlen von $\left\{\begin{matrix} r \\ 0 \end{matrix}\right.$ bis $\left.\begin{matrix} n \\ r \end{matrix}\right\}$ ſetzt, und die gefundenen Produkte ſummirt.

§. 55.

Aufgabe. *Es bleiben die Vorausſetzungen, wie in den vorhergehenden Aufgaben. Man ſoll die Wahrſcheinlichkeit finden, daſs juſt t von den n ausgeſonderten Fällen nicht an ihrer Stelle ſich ereignen werden.*

Auflösung. Man erhält die geſuchte Wahrſcheinlichkeit, wenn man in der allgemeinen Formel des §. 42. anſtatt r nach und nach alle ganze Zahlen von 0 bis $n-t$

setzt, und die gefundenen einzelnen Wahrscheinlichkeiten in eine Summe bringt, =

$$\left(1.\frac{n\ldots\ldots(n-t+1)}{1.2\ldots\ldots t}.\left\{\begin{matrix} 1\,(q-t+1)\ldots\ldots q \\ -t\,.\,(q-t+1)\ldots\ldots(q-1) \\ +\frac{t\,(t-1)}{1\,.\,2}.(q-t+1)\ldots\ldots(q-2) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{matrix}\right\}\times\right.$$

$$(m-n)\ldots\ldots(m-n-q+t+1)+$$

$$n.\frac{(n-1)\ldots\ldots(n-t)}{1.2\ldots\ldots t}.\left\{\begin{matrix} 1.(q-t)\ldots\ldots(q-1) \\ -t.(q-t)\ldots\ldots(q-2) \\ +\frac{t(t-1)}{1\,.\,2}.(q-t)\ldots(q-3) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{matrix}\right\}\times$$

$$(m-n)\ldots\ldots(m-n-q+t+2)+\ldots\ldots+$$

$$\frac{n\ldots\ldots(t+1)}{1.2\ldots(n-t)}.1.\left\{\begin{matrix} 1.(q-n+1)\ldots\ldots(q-n+t) \\ -t.(q-n+1)\ldots\ldots(q-n+t-1) \\ +\frac{t(t-1)}{1\,.\,2}.(q-n+1)\ldots\ldots(q-n+t-2) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{matrix}\right\}\times$$

$$\left.(m-n)\ldots\ldots\ldots(m-q+1)\right):m\ldots\ldots(m-q+1).$$

W. Z. F.

§. 56.

Wenn man in der eben (§. 55.) gefundenen allgemeinen Formel anstatt t nach und nach alle ganze Zahlen von $\left\{\begin{matrix} t \\ 0 \end{matrix}\right.$ bis $\left.\begin{matrix} n \\ t \end{matrix}\right\}$ setzt, und alle durch diese Substitutionen erhaltenen Produkte in eine Summe bringt: so ist diese Summe die Wahrscheinlichkeit, daſs bei q sich be-

gebenden Fällen $\begin{bmatrix}\text{wenigstens}\\ \text{höchstens}\end{bmatrix}$ t von den n ausgesonderten nicht an ihrem Orte sich ereignen werden.

§. 57.

Aufgabe. *Es bleiben ebendieselben Voraussetzungen, welche in den vorhergehenden Aufgaben gemacht worden sind: man sucht die Wahrscheinlichkeit, dass just r von den n ausgesonderten Fällen an ihrer Stelle sich ereignen werden.*

Auflösung. Man setze in der allgemeinen Formel (§. 42.) nach und nach für t alle ganze Zahlen von 0 bis $n-r$, und addire alle Produkte, welche durch diese Substitution erhalten werden; so ist die Summe derselben die verlangte Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{n\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r}\Big(1.[1].(m-n)\ldots(m-n-q+r+1)$$

$$+(n-r).\begin{bmatrix}1.(q-r)\\ -1\end{bmatrix}.(m-n)\ldots(m-n-q+r+2)$$

$$+\frac{(n-r)(n-r-1)}{1.2}.\left\{\begin{matrix}1.(q-r-1)(q-r)\\ -2.(q-r-1)\\ +1\end{matrix}\right\}.(m-n)\ldots(m-n-q+r+3)$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+1.\left\{\begin{matrix}1.(q-n+1)\ldots(q-r)\\ -(n-r).(q-n+1)\ldots(q-r-1)\\ +\frac{(n-r)(n-r-1)}{1.2}.(q-n+1)\ldots(q-r-2)\\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \pm 1\end{matrix}\right\}\times$$

$$(m-n)\ldots\ldots(m-q+1)\Big):m\ldots(m-q+1).$$

§. 58.

Aufgabe. *Bei den nämlichen Voraussetzungen, welche in den vorhergehenden Aufgaben gemacht worden sind, verlangt man die Wahrscheinlichkeit zu wissen, dass sich*

wenigstens r von den ausgesonderten Fällen, ein jeder an der ihm angewiesenen Stelle, ereignen werden.

AUFLÖSUNG. In der allgemeinen Formel, welche im vorhergehenden §. 57. gefunden worden ist, setze man nach und nach anstatt r alle ganze Zahlen von r bis n, und addire die vermittelst dieser Substitutionen herausgekommenen Produkte; so ist die Summe derselben die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\Bigg(\frac{n\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r}.\Bigg[1.[1].(m-n)\ldots(m-n-q+r+1)+$$

$$(n-r).\left\{\begin{matrix}1.(q-r)\\-1\end{matrix}\right\}(m-n)\ldots(m-n-q+r+2)+$$

$$\frac{(n-r)(n-r-1)}{1.2}.\left\{\begin{matrix}1.(q-r-1)(q-r)\\-2.(q-r-1)\\+1\end{matrix}\right\}.(m-n)\ldots(m-n-q+r+3)+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$1.\left\{\begin{matrix}1.(q-n+1)\ldots(q-r)\\-(n-r)(q-n+1)\ldots(q-r-1)\\+\frac{(n-r)(n-r-1)}{1.2}(q-n+1)\ldots(q-r-2)\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\\pm 1\end{matrix}\right\}\times$$

$$(m-n)\ldots(m-q+1)\Bigg]$$

$$+\frac{n\ldots(n-r)}{1.2\ldots(r+1)}.\Bigg[1.[1].(m-n)\ldots(m-n-q+r+2)+$$

$$(n-r-1)\left\{\begin{matrix}1.(q-r-1)\\-1\end{matrix}\right\}.(m-n)\ldots(m-n-q+r+3)+$$

$$\frac{(n-r-1)(n-r-2)}{1.2}.\left[\begin{matrix}1.(q-r-2)(q-r-1)\\-2(q-r-2)\\+1\end{matrix}\right]\times$$

$$(m-n)\ldots(m-n-q+r+4)+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$1.\left\{\begin{array}{l} 1.(q-n+1)\ldots.(q-r-1) \\ -(n-r-1).(q-n+1)\ldots.(q-r-2) \\ +\dfrac{(n-r-1)(n-r-2)}{1\;.\;2}.(q-n+1)\ldots.(q-r-3) \\ -+\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm \end{array}\right\}\times$$

$$(m-n)\ldots.(m-q+1)$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{n(n-1)}{1\;.\;2}.\Big[1.[1].(m-n)\ldots.(m-q-1)\;+$$

$$2.\left\{\begin{array}{l}1.(q-n+2)\\-1\end{array}\right\}.(m-n)\ldots.(m-q)\;+$$

$$1.\left[\begin{array}{l}1.(q-n+1)(q-n+2)\\-2.(q-n+1)\\+1\end{array}\right].(m-n)\ldots.(m-q+1)\Big]$$

$$+n.\Big[1.[1].(m-n)\ldots.(m-q)\;+$$

$$1.\left\{\begin{array}{l}1.(q-n+1\\-1\end{array}\right\}.(m-n)\ldots.(m-q+1)\Big]$$

$$+1.\Big[1.[1].(m-n)\ldots.(m-q+1)\Big]\Big):m\ldots.(m-q+1).$$

§. 59.

Aufgabe. *Unter den bisherigen Vorausſetzungen ſucht man die Wahrſcheinlichkeit, daſs höchſtens r von den ausgeſonderten Fällen, ein jeder an der ihm angewieſenen Stelle, ſich ereignen werden.*

Auflösung. In der (Aufgabe §. 57.) gefundenen allgemeinen Formel ſubſtituire man nach und nach für r alle ganze Zahlen von o bis r, und addire die Produkte, welche durch dieſe Subſtitutionen erhalten werden; ſo hat man die geſuchte Wahrſcheinlichkeit:

$$\Big(1\Big\{1.(1).(m-n)\ldots.(m-n-q+1)\;+$$

$$n\left(\begin{array}{l}1.q\\-1\end{array}\right).(m-n)\ldots.(m-n-q+2)\;+$$

$$\frac{n.(n-1)}{1\,.\,2}.\left\{\begin{array}{l}1.(q-1)\,q\\-2.(q-1)\\+1\end{array}\right\}.(m-n)\ldots.(m-n-q+3)+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$1.\left\{\begin{array}{l}1.(q-n+1)\ldots\ldots q\\-n.(q-n+1)\ldots.(q-1)\\+\dfrac{n.(n-1)}{1\,.\,2}.(q-n+1)\ldots(q-2)\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\\\pm 1\end{array}\right\}.(m-n)\ldots.(m-q+1)\Big\}$$

$$+\,n.\Big\{1.[1].(m-n)\ldots.(m-n-q+2)\quad+$$

$$(n-1).\left[\begin{array}{l}1.(q-1)\\-1\end{array}\right].(m-n)\ldots.(m-n-q+3)+$$

$$\frac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}.\left[\begin{array}{l}1.(q-2)(q-1)\\-2.(q-2)\\+1\end{array}\right].(m-n)\ldots(m-n-q+4)+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$1.\left\{\begin{array}{l}1.(q-n+1)\ldots.(q-1)\\-(n-1).(q-n+1)\ldots.(q-2)\\+\dfrac{(n-1)(n-2)}{1\,.\,2}.(q-n+1)\ldots(q-3)\\-+\ldots\ldots\ldots\ldots\\\pm 1\end{array}\right\}.(m-n)\ldots.(m-q+1)\Big]$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\,\frac{n\ldots.(n-r+1)}{1.2\ldots.r}.\Big[1.[1].(m-n)\ldots.(m-n-q+r+1)+$$

$$(n-r).\left[\begin{array}{l}1.(q-r)\\-1\end{array}\right].(m-n)\ldots.(m-n-q+r+2)+$$

$$\frac{(n-r).(n-r-1)}{1\,.\,2}.\left[\begin{array}{l}1.(q-r-1)(q-r)\\-2.(q-r-1)\\+1\end{array}\right].(m-n)\ldots(m-n-q+r+3)+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$1.\left\{\begin{matrix} 1.(q-n+1)\ldots.(q-r) \\ -(n-r).(q-n+1)\ldots.(q-r-1) \\ +\dfrac{(n-r)(n-r-1)}{1\ .\ 2}.(q-n+1)\ldots.(q-r-2) \\ -+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm 1 \end{matrix}\right\}\times$$

$$(n-n)\ldots.(m-q+1)\Big]\Big) : m\ldots\ldots(m-q+1).$$

§. 60.

Beispiel. Aus zehn verſchiedenen Karten, davon acht gezogen werden ſollen, wählt man ſechs, ſo daſs einer jeden davon eine beſtimmte Stelle angewieſen wird. Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs juſt vier an ihrer Stelle zum Vorſchein kommen werden?

In der §. 57. gefundenen allgemeinen Formel ſetze man $m=10$, $q=8$, $n=6$ und $r=4$; ſo erhält man die geſuchte Wahrſcheinlichkeit =

$$\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}.\Big\{1.(1).4.3.2.1+$$

$$2.\begin{pmatrix}1.4\\-1\end{pmatrix}.4.3.2+1.\begin{bmatrix}1.3.4\\-2.3\\+1\end{bmatrix}.4.3\Big\}:10.9.8.7.6.5.4.3=$$

$$\frac{3780}{1814400}=\frac{1}{480}.$$

Wie groſs wird die Wahrſcheinlichkeit ſein, daſs unter den acht gezogenen Karten wenigſtens vier von den ausgewählten ſein werden, und zwar eine jede an dem Orte, welcher ihr angewieſen worden iſt? Um dieſe Wahrſcheinlichkeit zu erhalten, mache man ebendieſeben Subſtitutionen, wie vorher, in der allgemeinen Formel, welche in der Aufgabe §. 58. gefunden worden; alſo iſt die geſuchte Wahrſcheinlichkeit

$$\Big\{\frac{6.5}{1.2}.\Big[1.(1).4.3.2.1+2.\binom{1.4}{-1}.4.3.2+1.\begin{bmatrix}1.3.4\\-2.3\\+1\end{bmatrix}.4.3\Big]$$

$$+6.\Big[1.(1).4.3.2+1.\binom{1.3}{-1}.4.3\Big]$$

$$+1.\big[1.(1).4.3\big]\Big\}:10.9.8.7.6.5.4.3=\frac{3780+288+12}{1814400}=\frac{8}{37800}.$$

Was iſt endlich die Wahrſcheinlichkeit, daſs unter den acht gezogenen Karten ſich höchſtens drei von den ausgewählten befinden werden, eine jede an dem Orte, welcher ihr angewieſen worden? Die nämlichen Subſtitutionen wie vorher (ausgenommen für r, welches hier $=3$ iſt) macht man in der allgemeinen Formel, welche in der Aufgabe (§. 59.) gefunden worden iſt; man bekömmt alſo die geſuchte Wahrſcheinlichkeit:

$$\Big(1.\Big[15.\begin{Bmatrix}1.5.6.7.8\\-4.5.6.7\\+6.5.6\\-4.5\\+1\end{Bmatrix}.4.3.2.1+$$

$$6.\begin{Bmatrix}1.4.5.6.7.8\\-5.4.5.6.7\\+10.4.5.6\\-10.4.5\\+5.4\\-1\end{Bmatrix}.4.3.2+$$

$$1.\begin{Bmatrix}1.3.4.5.6.7.8\\-6.3.4.5.6.7\\+15.3.4.5.6\\-20.3.4.5\\+15.3.4\\-6.3\\+1\end{Bmatrix}.4.3\Big]$$

$$+6\cdot\Big[10\cdot\left[\begin{array}{l}1\cdot5\cdot6\cdot7\\-3\cdot5\cdot6\\+3\cdot5\\-1\end{array}\right]\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\;+$$

$$5\cdot\left[\begin{array}{l}1\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\\-4\cdot4\cdot5\cdot6\\+6\cdot4\cdot5\\-4\cdot4\\+1\end{array}\right]\cdot4\cdot3\cdot2\;+$$

$$1\cdot\left[\begin{array}{l}1\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\\-5\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\\+10\cdot3\cdot4\cdot5\\-10\cdot3\cdot4\\+5\cdot3\\-1\end{array}\right]\cdot4\cdot3\Big]$$

$$+15\cdot\Big[6\cdot\left[\begin{array}{l}1\cdot5\cdot6\\-2\cdot5\\+1\end{array}\right]\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\;+$$

$$4\cdot\left[\begin{array}{l}1\cdot4\cdot5\cdot6\\-3\cdot4\cdot5\\+3\cdot4\\-1\end{array}\right]\cdot4\cdot3\cdot2\;+$$

$$1\cdot\left[\begin{array}{l}1\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\\-4\cdot3\cdot4\cdot5\\+6\cdot3\cdot4\\-4\cdot3\\+1\end{array}\right]\cdot4\cdot3\Big]$$

$$+20\Big[3\cdot\left\{\begin{array}{l}1\cdot5\\-1\end{array}\right\}\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1\;+$$

$$3\cdot\left\{\begin{array}{l}1\cdot4\cdot5\\-2\cdot4\\+1\end{array}\right\}\cdot4\cdot3\cdot2\;+$$

$$1\cdot\left\{\begin{array}{l}1\cdot3\cdot4\cdot5\\-3\cdot3\cdot4\\+3\cdot3\\-1\end{array}\right\}\cdot4\cdot3\Big]\Big):10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3$$

$$= \frac{982182 + 615168 + 180180 + 32160}{1814400} = \frac{37715}{37800}.$$

§. 61.*

Aus einem Piketſpiel wählt man vier Blätter in einer beſtimmten Ordnung aus, nämlich Pik-As die dritte, Tref-König die fünfte, Koeur-Dame die ſiebente, Kareau-Bube die zehnte. Was iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs unter zehn gezogenen wenigſtens zwei von den ausgewählten, nämlich entweder Pik-As die dritte und Tref-König die fünfte, oder Pik-As die dritte und Koeur-Dame die ſiebente, oder Pik-As die dritte und Kareau-Bube die zehnte, oder Tref-König die fünfte und Koeur-Dame die ſiebente, oder Tref-König die fünfte und Kareau-Bube die zehnte, oder Koeur-Dame die ſiebente und Kareau-Bube die zehnte, an ihrer Stelle ſich befinden werden?

Man ſetze (§. 58.) $m=32$, $n=4$, $q=10$, $r=2$; ſo erhält man die geſuchte Wahrſcheinlichkeit =

$$\Bigg(\frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\cdot\Bigg\{1\cdot[1]\,28\cdot 27\ldots 21 + 2\cdot\begin{bmatrix}1\cdot 8\\ -1\end{bmatrix} 28\cdot 27\ldots 22 +$$

$$1\cdot\begin{bmatrix}1\cdot 7\cdot 8\\ -2\cdot 7\\ +1\end{bmatrix}\cdot 28\cdot 27\ldots 23\Bigg\}$$

$$+ 4\cdot\Big[1\cdot(1)\cdot 28\ldots 22 + 1\begin{bmatrix}1\cdot 7\\ -1\end{bmatrix}\cdot 28\ldots 23\Big]$$

$$+ 1\cdot[1\cdot(1)\cdot 28\ldots 23]\Bigg) : 32\ldots 23.\quad (\text{S. §. 1})$$

§. 62.*

Man ſoll vier Stük aus 32 Karten ziehen. Was iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs man alle vier Könige, und zwar in folgender Ordnung: Eicheln, Roth, Schelln, und Grün, trift?

Man setze in dem allgemeinen Ausdruk $\frac{1}{m....(m-q+1)}$ (§. 45.) $m=32$, $q=4$, so erhält man die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{1}{32.31.30.29}=\frac{1}{863040}.$$

Für $q=5$ bis 32 ist die Wahrscheinlichkeit eben so groß (ebendaselbst).

Kapitel VII.

Von der Wahrscheinlichkeit der Begebenheiten bei mehrern Versuchen.

§. 1.

Es mag eine bestimmte Begebenheit bestehen in dem Geschehen eines einzigen aus den Fällen, die von einem gegebenen Zustande abhängen; oder einer gewissen Anzahl solcher Fälle, die sich entweder zugleich oder hinter einander in jeder beliebigen Ordnung ereignen soll; oder einer Anzahl, die hinter einander in einer vorgeschriebenen Ordnung sich zutrage; es mag endlich die Wahrscheinlichkeit dieser Begebenheit einfach, oder aus mehrern andern Wahrscheinlichkeiten zusammengesetzt sein: so kann die Wahrscheinlichkeit derselben immer durch den allgemeinen Ausdruk $\frac{n}{m}$ vorgestellet werden, worin der Nenner m die Anzahl aller Fälle, und der Zähler n die Anzahl derer, welche die bestimmte Begebenheit geben, anzeigt. Bei allen diesen Voraussetzungen giebt es nun folgende zwei Fälle: entweder die Handlung, von welcher die bestimmte Begebenheit abhängt, hat nur ein einziges mal statt; für diesen Fall haben wir in den vorhergehenden Kapiteln die

Wahrſcheinlichkeit nach einer allgemeinen Methode zu finden angewieſen: oder die Handlung, wovon die Begebenheit abhängt, wird mehrmal wiederholet, oder welches einerlei iſt, es giebt eine Anzahl x, Verſuche dieſer Handlung (Kap. I. §. 16.); es kommt darauf an, für dieſen zweiten Fall die Wahrſcheinlichkeit der beſtimmten Begebenheit anzugeben, davon die Wahrſcheinlichkeit in einem einzigen Verſuche durch $\frac{n}{m}$ vorgeſtellet wird: welches in dem gegenwärtigen Kapitel geſchehen ſoll.

§. 2.

Lehrsatz. *Wenn m die Anzahl der Fälle, die von einer gegebenen Handlung, Bewegung, oder einem gegebenen Zuſtande abhängen, in einem Verſuche bedeutet: ſo iſt die Menge der Fälle, die von eben dieſer Handlung, Bewegung, oder ebendemſelben Zuſtande abhängen, in x Verſuchen $= m^x$.*

Beweis. Wenn man annimmt, daſs nur zwei Verſuche ſein ſollen; ſo kann ein jeder von den m gegebenen Fällen im erſten Verſuche ſich ereignen; und welcher Fall auch im erſten Verſuche ſich ereignen mag, ſo kann dazu ein jeder von den m gegebenen Fällen im zweiten Verſuche ſich ereignen. Sind alſo $a, b, c, d,$ — die m gegebenen Fälle, ſo laſſen ſich alle möglichen Fälle bei zwei Verſuchen, durch die Glieder folgender Tafel darſtellen, deren Anzahl m^2 iſt.

aa	ba	ca	da	—
ab	bb	cb	db	—
ac	bc	cc	dc	—
ad	bd	cd	dd	—
—	—	—	—	—

Imgleichen, was auch für Fälle in den beiden erſten Verſuchen (nach der vorhergehenden Tafel) ſich ereignen mögen, ſo kann ein jeder von den m gegebenen Fällen

im dritten Verſuche ſich ereignen, und die Fälle, wenn drei Verſuche ſtatt finden, werden durch die Glieder folgender Tafel dargeſtellt, deren Anzahl m^3 iſt.

a a a	*b a a*	*c a a*	*d a a*	—
a a b	*b a b*	*c a b*	*d a b*	—
a a c	*b a c*	*c a c*	*d a c*	—
a a d	*b a d*	*c a d*	*d a d*	—
—	—	—	—	—
a b a	*b b a*	*c b a*	*d b a*	—
a b b	*b b b*	*c b b*	*d b b*	—
a b c	*b b c*	*c b c*	*d b c*	—
a b d	*b b d*	*c b d*	*d b d*	—
—	—	—	—	—
a c a	*b c a*	*c c a*	*d c a*	—
a c b	*b c b*	*c c b*	*d c b*	—
a c c	*b c c*	*c c c*	*d c c*	—
a c d	*b c d*	*c c d*	*d c d*	—
—	—	—	—	—
a d a	*b d a*	*c d a*	*d d a*	—
a d b	*b d b*	*c d b*	*d d b*	—
a d c	*b d c*	*c d c*	*d d c*	—
a d d	*b d d*	*c d d*	*d d d*	—
—	—	—	—	—
—	—	—	—	—
—	—	—	—	—
—	—	—	—	—
—	—	—	—	—
—	—	—	—	—

Und ſo weiter. Ueberhaupt, wenn die Anzahl aller Fälle in $x-1$ Verſuchen $= m^{x-1}$ iſt, ſo iſt die Anzahl der Fälle in x Verſuchen $= m^x$, weil jeder Fall in $x-1$ Verſuchen m mal genommen wird. *W. Z. E.*

§. 3.

Lehrsatz. *Ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Begebenheit bei einem Versuche geschiehet,* $= \frac{n}{m}$; *so ist die Wahrscheinlichkeit, dass eben diese Begebenheit in x Versuchen, und zwar in jedem Versuche geschiehet* $= \left(\frac{n}{m}\right)^x$; *und die Wahrscheinlichkeit, dass diese Begebenheit in x Versuchen gar nicht geschiehet* $= \left(1 - \frac{n}{m}\right)^x$.

Beweis. Wenn man voraussetzt, dass die Wahrscheinlichkeit in dem Falle eines einzigen Versuches $\frac{n}{m}$ ist, so ist die Anzahl der Fälle, welche die bestimmte Begebenheit geben, in einem Versuche $= n$, und die Anzahl der Fälle, welche diese Begebenheit nicht geben, $m - n$: folglich ist die Anzahl der Fälle, welche die Begebenheit, wenn x Versuche statt finden, in jedem Versuche geben (§. 2.) n^x, und die Anzahl der Fälle, welche die Begebenheit in keinem der x Versuche geben, $(m-n)^x$. Folglich ist 1. die Wahrscheinlichkeit, dass die bestimmte Begebenheit in allen x Versuchen sich ereignen wird, $= \frac{n^x}{m^x}$ oder $\left(\frac{n}{m}\right)^x$, welcher Satz schon (Kap. II. §. 7.) erwiesen worden ist; und 2. die Wahrscheinlichkeit, dass die bestimmte Begebenheit in keinem von den x Versuchen sich ereignen wird $= \frac{(m-n)^x}{m^x}$ oder $\left(1 - \frac{n}{m}\right)^x$. *W. Z. E.*

Z. B. Es würfeln vier Personen, jede einmal, mit zwei Würfeln; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass kei-

ne einen Pafch werfen wird $= \left\{1 - \frac{1}{6}\right\}^4$ oder $\frac{625}{1296} = \left\{\frac{30}{36}\right\}^4$.

S. Kap. II. §. 8.

§. 4.

Bei mehrern Verfuchen von einerlei Art, wo bei jedem Verfuche mehrere Refultate möglich find, vergröfsert fich die Wahrfcheinlichkeit eines jeden diefer Refultate nach Maafsgabe der gröfsern Menge der Verfuche. Z. B. Wenn die Wahrfcheinlichkeit mit zwei gemeinen Spielwürfeln auf einen Wurf einen Pafch zu werfen, $\frac{1}{6}$ ift; fo mufs die Wahrfcheinlichkeit, einen Pafch zu werfen, auf drei folcher Würfe hinter einander gröfser als $\frac{1}{6}$ fein. Doch wächft alsdann die Wahrfcheinlichkeit nicht in der Verhältnifs der Anzahl der Verfuche, fondern wie eine gewiffe Funktion von der Wahrfcheinlichkeit der Begebenheit in einem Verfuche und der Anzahl der angeftellten Verfuche. Diefe Funktion wird durch folgenden Lehrfatz beftimmt.

§. 5.

Lehrsatz. *Die Wahrfcheinlichkeit einer Begebenheit bei mehrern Verfuchen ift fo grofs als die Einheit, wenn man davon abziehet diejenige Potenz des Ueberfchuffes der Einheit über die Wahrfcheinlichkeit diefer Begebenheit in einem Verfuche, deren Exponent der Anzahl der Verfuche gleich ift.*

So hat man, wenn $\frac{n}{m}$ *die Wahrfcheinlichkeit der Begebenheit in einem Verfuche,* x *die Anzahl der Verfuche,* P *die Wahrfcheinlichkeit eben diefer Begebenheit in* x *Verfuchen bedeutet:* $P = 1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)^x$.

Beweis. Wir haben geſehen (§. 3.), daſs, wenn man vorausſetzt, daſs die Wahrſcheinlichkeit der Begebenheit in einem Verſuche $\frac{n}{m}$, und die Anzahl der Verſuche $= x$ iſt; die Wahrſcheinlichkeit, daſs die Begebenheit in gar keinem Verſuche ſich ereignen wird, $= \left(1 - \frac{n}{m}\right)^x$ iſt: Folglich iſt die entgegengeſetzte Wahrſcheinlichkeit, welches diejenige Wahrſcheinlichkeit iſt, daſs dieſe Begebenheit in x Verſuchen ſich wenigſtens einmal ereignen wird, $= 1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)^x$ (Kap. I. §. 14. und 15.). *W. Z. E.*

§. 6.

Zusatz. 1. Wenn die Wahrſcheinlichkeit einer Begebenheit in einem Verſuche gegeben iſt, ſo läſst ſich daraus die Wahrſcheinlichkeit eben dieſer Begebenheit in x Verſuchen herleiten; folglich läſst ſich auch die Verhältniſs der Miſen finden, daſs man rechtmäſsig für und wider ſolche Begebenheit wetten kann; und wie viel Verſuche nöthig ſind, um bei gleichen Miſen mit Vortheil wetten zu können, daſs dieſe Begebenheit ſich ereignen werde.

Zum Beiſpiel. Die Wahrſcheinlichkeit mit zwei Spielwürfeln auf einen Wurf einen Paſch zu werfen, iſt $\frac{1}{6}$; alſo iſt die Wahrſcheinlichkeit mit zwei Würfeln

in $\left\{\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ \text{etc.} \end{matrix}\right\}$ Würfen, einen Paſch zu werfen;

1 –

$$\left\{\begin{array}{lll} 1-\left(1-\frac{1}{6}\right)^2=1-\frac{5^2}{6^2}=\frac{11}{36} \\ 1-\left(1-\frac{1}{6}\right)^3=1-\frac{5^3}{6^3}=\frac{91}{216} \\ 1-\left(1-\frac{1}{6}\right)^4=1-\frac{5^4}{6^4}=\frac{671}{1296} \\ \text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \end{array}\right\}$$

Hieraus ersiehet man, dass man bei gleichen Misen mit zwei Würfeln in vier Würfen einen Pasch zu werfen, mit einigem Vortheile wetten kann, weil $\frac{671}{1296} > \frac{1}{2}$ ist; und dass, damit die Wette, mit zwei Würfeln in $\left\{\begin{array}{c}2\\3\\4\end{array}\right\}$ Würfen einen Pasch zu werfen, gerecht ist, die Misen sich verhalten müssen, wie $\left\{\begin{array}{c}11:25\\91:125\\671:625\end{array}\right\}$ (Kap. I. §. 18.).

§. 7.

ZUSATZ 2. Sind von den folgenden drei Grössen:

der Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit in einem Versuche $= \frac{n}{m}$

der Anzahl der Versuche $= x$

und der Wahrscheinlichkeit der Begebenheit in diesen Versuchen $= P$

je zwei gegeben, so lässt sich daraus allezeit die dritte bestimmen. Denn aus der Gleichung

$P = 1 - \left[1 - \frac{n}{m}\right]^x$, leitet man her

$\frac{n}{m} = 1 - \sqrt[x]{(1 - P)}$, und

$$x = \frac{\log.\ (1 - P)}{\log.\ (1 - \frac{n}{m})}.$$

§. 8.

Zusatz 3. Wenn $n = \frac{m}{2}$: welches der Fall für die rechtmäſsige Wette bei gleichen Miſen iſt, in einem einzigen Verſuche; ſo wird die Wahrſcheinlichkeit eben dieſer Begebenheit in x Verſuchen ſein, $= 1 - \frac{1}{2^x}$; denn alsdann verwandelt ſich die Gröſse $1 - \left[1 - \frac{n}{m}\right]^x$ in

$$1 - \left[1 - \frac{1}{2}\right]^x = 1 - \left[\frac{1}{2}\right]^x = 1 - \frac{1}{2^x}.$$

§. 9.

Zusatz 4. Iſt die Zahl x der Verſuche unendlich; ſo wird der Bruch $\left[1 - \frac{n}{m}\right]^x$ unendlich klein oder o; und alsdann $P = 1$. Hieraus ſiehet man, daſs die Begebenheit, deren Wahrſcheinlichkeit in einem Verſuche, oder auch in einer endlichen Zahl von Verſuchen noch ſo geringe iſt, gewiſs wird, wenn man unendlich viel Verſuche annimmt.

§. 10.

Zusatz 5. Wenn P oder $1 - \left[1 - \frac{n}{m}\right]^x = \frac{1}{2}$; ſo bekömmt man $\frac{n}{m} = \frac{1}{\sqrt[x]{2}}$; Alſo: wenn die Wahrſcheinlichkeit einer Begebenheit in einer gegebenen Anzahl von Verſuchen, $\frac{1}{2}$ wird, ſo iſt die Wahrſcheinlich-

keit dieſer Begebenheit in einem einzigen Verſuche eine irrational Zahl.

Und umgekehrt, wenn die Wahrſcheinlichkeit dieſer Begebenheit in einem einzigen Verſuche eine rational Zahl iſt, ſo kann dieſe Begebenheit in einer beſtimmten Menge von Verſuchen die Wahrſcheinlichkeit $\frac{1}{2}$ genau nicht erhalten.

§. 11.*

Lehrsatz. *Wenn $\frac{n}{m}$ die Wahrſcheinlichkeit einer Begebenheit in einem Verſuche bedeutet; ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs dieſe Begebenheit in x Verſuchen höchſtens x – 1 mal ſich ereignen wird, oder wenigſtens einmal ſich nicht ereignen wird, (aus §. 3.)* $= 1 - \left[\frac{n}{m}\right]^x$.

§. 12.*

Aufgabe. *Für die Begebenheit mit einem gemeinen Spielwürfel, in mehrern Würfen wenigſtens einmal ein As zu werfen, die Verhältniſs der Miſen der beiden Spieler zu finden.*

Auflösung. In einem Verſuche iſt die Wahrſcheinlichkeit, ein As zu werfen, $= \frac{1}{6}$; alſo die entgegengeſetzte Wahrſcheinlichkeit, kein As zu werfen, $= \frac{5}{6}$; und folglich die geſuchte Verhältniſs der Miſen $= 1:5$. In zwei Verſuchen iſt die Wahrſcheinlichkeit, ein As zu werfen, $= 1 - \left[1 - \frac{1}{6}\right]^2$ (§. 5.) $= 1 - \left[\frac{5}{6}\right]^2 = \frac{11}{36}$; alſo die entgegengeſetzte Wahrſcheinlichkeit $= \frac{25}{36}$; und

folglich die Verhältniſs der Miſen $= 11 : 25 = 1 : 2 + \frac{1}{11}$, geringer als die Verhältniſs $1 : 2$. In drei Würfen iſt die Wahrſcheinlichkeit, ein As zu werfen, $= 1 - \left[1 - \frac{1}{6}\right]^3 = 1 - \left[\frac{5}{6}\right]^3 = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$; alſo die entgegengeſetzte Wahrſcheinlichkeit $= \frac{125}{216}$; und folglich die Verhältniſs der Miſen beider Spieler $= 91 : 125 = 1 : 1 + \frac{34}{91}$. In vier Verſuchen iſt die Wahrſcheinlichkeit, ein As zu werfen, $= 1 - \left[\frac{5}{6}\right]^4 = \frac{671}{1296}$; alſo die Verhältniſs der Miſen $= 671 : 625 = 1 + \frac{46}{625} : 1$. Und ſo weiter.

Ueberhaupt iſt in x Verſuchen die Wahrſcheinlichkeit, ein As zu werfen, $= 1 - \left[\frac{5}{6}\right]^x = \frac{6^x - 5^x}{6^x}$; alſo die entgegengeſetzte Wahrſcheinlichkeit $= \left[\frac{5}{6}\right]^x$; und folglich die Verhältniſs der Miſen beider Spieler $= (6^x - 5^x) : 5^x$.

§. 13.*

Auf eben dieſe Weiſe findet man die Verhältniſs der Miſen zweier Spieler, wenn mit zwei Würfeln in x Würfen zwölf Augen geworfen werden ſollen, $= 1 - \left[1 - \frac{1}{36}\right]^x : \left[1 - \frac{1}{36}\right]^x = 1 - \left[\frac{35}{36}\right]^x : \left[\frac{35}{36}\right]^x = 36^x - 35^x : 35^x$.

Z. B. Für zwei Würfe iſt die Verhältniſs der Miſen $= 36^2 - 35^2 : 35^2 = 71 : 1225 = 1 : 17 + \frac{18}{71}$. Für vier Würfe iſt dieſe Verhältniſs $= 36^4 - 35^4 : 35^4 = 178991 : 1500625$

$= 1 : 8 + \frac{68697}{178991}$. Und so weiter. Endlich wird man hiedurch finden, daſs jemand, um zwölf Augen zu werfen, erst bei 25 Würfen mit Vortheil wetten könne; da hingegen, mit einem Würfel eine Sechse zu werfen, bei vier Würfen die Wette schon mit Vortheil angestellet werden kann (§. 6. und 12.). Also haben die beiden Spieler, mit einem Würfel eine Sechse zu werfen, bei vier Würfen; und mit zwei Würfeln zwei Sechsen zu werfen, erst bei 25 Würfen beinahe gleiche Wahrscheinlichkeiten.

§. 14.*

Ist überhaupt in einem Versuche die Anzahl aller Fälle $= m$, der günstigen $= n$, also der widrigen $= m - n$; so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs die Begebenheit in x Versuchen wenigstens einmal geschiehet (§. 5.) $= 1 - \left[1 - \frac{n}{m}\right]^x$ oder $1 - \frac{(m-n)^x}{m^x}$ oder $\frac{m^x - (m-n)^x}{m^x}$; und die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $= \frac{(m-n)^x}{m^x}$. Folglich die Verhältniſs der Misen für die beiden Spieler $= \frac{m^x - (m-n)^x}{m^x} : \frac{(m-n)^x}{m^x} = m^x - (m-n)^x : (m-n)^x$.

Z. B. Wird nach der Wahrscheinlichkeit gefragt, auf einen Wurf mit drei gleichen Würfeln ein As zu werfen, so ist diese offenbar eben so groſs, als diejenige Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel in drei Würfen ein As zu werfen. Also ist die Verhältniſs der Misen $=$

$$6^3 - (6-1)^3 : (6-1)^3 = 6^3 - 5^3 : 5^3 = 91 : 125 \text{ (§. 12.)}.$$

§. 15.*

Um zu finden, in wie viel Würfen beide Spieler einerlei Wahrscheinlichkeiten erhalten (§. 13.); setze man ihre Wahrscheinlichkeiten (§. 14.) einander gleich:

$$\frac{m^x - (m-n)^x}{m} = \frac{(m-n)^x}{m^x},$$ hieraus folgt

$$m^x - (m-n)^x = (m-n)^x,$$ oder

$$m^x = 2 \,.\, (m-n)^x,$$ alſo

$$x \,.\, \log. m = \log. 2 + x \,.\, \log. (m-n),$$ und

$$x = \frac{\log. 2}{\log. m - \log. (m-n)}. \text{*)}$$

Man findet alſo die geſuchte Zahl der Würfe, x, wenn man den Logarithmen der Zahl 2 durch den Unterſchied der Logarithmen der Zahlen m und $m-n$ dividirt.

Z. B. Für das letzte Beiſpiel (§. 13.) iſt $m = 36$, $m - n = 35$, alſo bekömmt man $x = \frac{\log. 2}{\log. 36 - \log. 35}$;

Nun iſt $\log. 2 = 0,\ 3010300$ | $\log. 36 = 1,\ 5563025$, $\log. 35 = 1,\ 5440680$

$$\log. 36 - \log. 35 = 0,0122345$$

folglich $x = \frac{0,\ 3010300}{0,\ 0122345} = 24, +,$ oder $25 -$; das heiſst, der eine Spieler wettet bei 24 Würfen noch nicht, aber bei 25 Würfen ſchon mit Vortheil, mit zwei Würfeln zwölf Augen zu werfen, wie am a. O. (§. 13.).

§. 16.*

Aufgabe. *Es treten einige Spieler zuſammen, um eine gewiſſe Anzahl Augen zu werfen, ſo, daſs einem nach dem andern einige Würfe hinter einander erlaubt werden. Man ſucht eines jeden Wahrſcheinlichkeit.*

Auflösung. Es bedeute r die Anzahl der Würfe des letzten, d. i. desjenigen Spielers, deſſen Wahrſcheinlichkeit geſucht wird, q aber die Summe der Würfe aller vorhergehenden Spieler; ſo iſt $q + r = x$ die Summe der Würfe aller Spieler bis zu demjenigen, deſſen

*) Eben dieſe Formel findet man aus der Formel für x in §. 7, wenn man $P = \frac{1}{2}$ ſetzt.

Wahrscheinlichkeit gesucht wird. Nun ist offenbar die Wahrscheinlichkeit aller Spieler bis zu dem letzten $= \frac{m^x - (m-n)^x}{m^x}$ (§. 14.), weil es einerlei ist, ob ein jeder selbst, oder einer für alle würfelt; und die Wahrscheinlichkeit aller vorhergehenden Spieler $= \frac{m^{x-r} - (m-n)^{x-r}}{m^{x-r}}$; Folglich die Wahrscheinlichkeit des letzten =

$$\frac{m^x - (m-n)^x}{m^x} - \frac{m^{x-r} - (m-n)^{x-r}}{m^{x-r}} =$$

$$\frac{(m-n)^{x-r} - (m-n)^x . m^{-r}}{m^{x-r}} = \frac{m^r (m-n)^{x-r} - (m-n)^x}{m^x}$$

$$\text{oder } \left\{ \frac{1}{\left(1-\frac{n}{m}\right)^r} - 1 \right\} . \left(1 - \frac{n}{m}\right)^x. \quad \textit{W. Z. F.}$$

Für $q = 0$, ist $r = x$, und folglich die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{m^x - (m-n)^x}{m^x}$, wie gehörig (§. 14.).

§. 17. *

Beispiel. Acht Spieler wetten gegen einen Neunten, mit zwei Würfeln wenigstens einmal sieben Augen zu werfen, und zwar werden

dem ersten Spieler 1 Wurf, und hierauf
dem zweiten — 2 Würfe,
dem dritten — 3 —
dem vierten — 4 —
und so weiter

hinter einander erlaubt. Man verlangt die Wahrscheinlichkeit des vierten Spielers zu wissen.

Hier ist $r = 4$, q oder $x - r = 1 + 2 + 3 = 6$, also $x = 10$, und folglich $\frac{m^r (m-n)^{x-r} - (m-n)^x}{m^x} =$

$\frac{m^4 (m-n)^6 - (m-n)^{10}}{m^{10}}$. Nun ist $m=36$, $m-n=30$ (Kap. I. §. 4. und 10.); da aber $36:30=6:5$, so kann man setzen $\frac{m^4 (m-n)^6 - (m-n)^{10}}{m^{10}} = \frac{6^4 . 5^6 - 5^{10}}{6^{10}} = \frac{10484375}{60466176}$, welches die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist.

§. 18.*

Werden einem jeden Spieler gleich viel Würfe, an der Zahl r zu thun erlaubt; so ist, wenn die Anzahl der vorhergehenden Spieler $=y$ gesetzt wird, $x=q+r=ry+r$, und folglich die Wahrscheinlichkeit des letzten $=$

$$\frac{m^r(m-n)^{ry}-(m-n)^{ry+r}}{m^{ry+r}} = \frac{m^r - (m-n)^r}{m^r} . \left[\frac{m-n}{m}\right]^{ry}$$

$$\text{oder } \left[1-\left(1-\frac{n}{m}\right)^r\right].\left(1-\frac{n}{m}\right)^{ry},$$

Ist $r=1$, d. h. wird einem jeden nur ein Wurf erlaubt, so ist $x=y+1$, und folglich die Wahrscheinlichkeit des letzten oder $(y+1)$ten Spielers $=$

$$\frac{m(m-n)^{x-1} - (m-n)^x}{m^x} \text{ oder } \frac{n}{m} . \left[1-\frac{n}{m}\right]^{x-1}.$$

§. 19.*

Aufgabe. *In (§. 16.) werden dem ersten Spieler eine gegebene Anzahl Würfe erlaubt; man sucht die Anzahl der Würfe des zweiten und der übrigen Spieler, damit alle einerlei Wahrscheinlichkeiten erhalten.*

Auflösung. Es sei die Anzahl der Spieler $=a$; die Summe der Würfe aller Spieler $=x$, ebendieselbe weniger den Würfen des letzten Spielers $=y$; so ist $x-y$ die Anzahl der Würfe des letzten Spielers. Sind nun dem ersten Spieler f Würfe erlaubt, so ist seine Wahrscheinlichkeit $=\frac{m^f - (m-n)^f}{m^f}$ (§. 14.); Es ist aber die

Wahrscheinlichkeit aller a Spieler zusammengenommen:

$$\frac{m^x - (m-n)^x}{m^x} \text{ (ebendaselbst)}$$

offenbar so grofs, als die Wahrscheinlichkeit des ersten Spielers a mal genommen; weil eines jeden folgenden Spielers Wahrscheinlichkeit eben so grofs als die Wahrscheinlichkeit des ersten Spielers sein soll. Also hat man die Gleichung:

$$a.\frac{m^f - (m-n)^f}{m^f} = \frac{m^x - (m-n)^x}{m^x}$$

aus welcher der Werth von x, oder die Anzahl der Würfe aller Spieler, folgendergestalt gefunden wird: Es ist $\frac{a(m^f-(m-n)^f)}{m^f} = 1 - \left[\frac{m-n}{m}\right]^x$, also

$$\left[\frac{m-n}{m}\right]^x = \frac{m^f - a(m^f-(m-n)^f)}{m^f} = \frac{(1-a)m^f + (m-n)^f a}{m^f}, \text{ und}$$

$$x(\log.(m-n) - \log.m) = \log.(m^f(1-a) + (m-n)^f a) - f.\log.m,$$

$$\text{also } x = \frac{\log.(m^f(1-a) + (m-n)^f a) - f.\log.m}{\log.(m-n) - \log.m}, \text{ oder}$$

$$x = \frac{f.\log.m - \log.(m^f(1-a) + (m-n)^f a)}{\log.m - \log.(m-n)}.$$

Auf eben diese Art findet man aus folgender Gleichung, welche durch ähnliche Schlüsse, wie die erste für x, gefunden wird:

$$(a-1).\frac{m^f - (m-n)^f}{m^f} = \frac{m^y - (m-n)^y}{m^y};$$

die Anzahl der Würfe aller Spieler die Zahl der Würfe des letzten Spielers abgerechnet, oder

$$y = \frac{f.\log.m - \log.(m^f(2-a) + (m-n)^f(a-1))}{\log.m - \log.(m-n)},$$

welchen Ausdruk für y man auch unmittelbar erhält, wenn man in der Formel für x, $a-1$ anstatt a schreibt.

Folglich ist die gesuchte Anzahl der Würfe des letzten Spielers oder $x-y=$

$$\frac{f\log. m - \log.(m^f(1-a)+(m-n)^f a)}{\log. m - \log.(m-n)} -$$

$$\frac{f\log. m - \log.(m^f(2-a)+(m-n)^f(a-1))}{\log. m - \log.(m-n)} =$$

$$\frac{\log.(m^f(2-a)+(m-n)^f(a-1)) - \log.(m^f(1-a)+(m-n)^f a)}{\log. m - \log.(m-n)}.$$

W. Z. F.

§. 20.*

Beispiel. Wenn drei Spieler sind, und dem ersten zwei Würfe erlaubt sind, und mit zwei Würfeln sieben Augen geworfen werden sollen; so ist $m=36$, $m-n=30$, dafür man, um die Rechnung abzukürzen, $m=6$ und $m-n=5$ setzt, ferner $f=2$, folglich ist

$$x-y=\frac{\log.(6^2(2-a)+5^2(a-1)) - \log.(6^2(1-a)+5^2 a)}{\log. 6 - \log. 5}$$

Nun setze man *fürs erste* $a=2$, so ist $x-y=$

$$\frac{\log.25-\log.(50-36)}{\log.6-\log.5},$$

$$\begin{array}{r} \log.\ 25 = 1,3979400 \\ \log.(50-36)=\log.\ 14 = 1,1461280 \\ \hline \log.25-\log.\ 14=0,2518120 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log.\ 6=0,7781513 \\ \log.\ 5=0,6989700 \\ \hline \log.6-\log.5=0,0791813 \end{array}$$

also $x-y=\frac{\log.25-\log.14}{\log.6-\log.5}=\frac{0,2518120}{0,0791813}=\frac{2518120}{791813}=3,+;$

und *zweitens* $a=3$, so ist $x-y=$

$$\frac{\log.(50-36)-\log.(75-72)}{\log.6-\log.5}=\frac{\log.14-\log.3}{\log.6-\log.5},$$

$$\begin{array}{r} \log. 14 = 1,1461280 \\ \log. 3 = 0,4771213 \\ \hline \log 14 - \log. 3 = 0,6690067 \end{array}$$

Demnach ist $x - y = \frac{0,6690067}{0,0791813} = 8, + .$

Also muſs der zweite Spieler dreimal, und der dritte achtmal würfeln.

§. 21.*

In einer Urne liegen sechs weiſe und sechs schwarze Kugeln. Greift nun der erste unter zwei Spielern zweimal hinein, um nach einander zwei Kugeln herauszuziehen; so ist die Wahrscheinlichkeit, daſs er eine weiſe Kugel zieht (§. 8.) $1 - \frac{1}{4}$ oder $\frac{3}{4}$. Weil diese Wahrscheinlichkeit $> \frac{1}{2}$ ist; so erhellet, daſs für den Fall die vorige Aufgabe (§. 19.) unmöglich ist, welches auch die Rechnung giebt. Nämlich: da hier zwei Spieler sind, so ist $a = 2$; ferner ist $f = 2$, $m = 12$, $m - n = 6$, oder $m = 2$, $m - n = 1$, also $x - y = \frac{\log. 1 - \log. (-4 + 2)}{\log. 2 - \log. 1} = \frac{-\log. -2}{\log. 2}$, welches eine unmögliche Gröſse ist. *)

Wenn also die Aufgabe (§. 19.) möglich sein soll, so darf des ersten Spielers Wahrscheinlichkeit, bei zwei Spielern nicht gröſser als $\frac{1}{2}$; bei drei Spielern nicht $> \frac{1}{3}$; bei vier Spielern nicht $> \frac{1}{4}$; u. s. f. sein.

*) *Kästners* Analysis des Unendl. 332. VII.

§. 22.*

Anmerkung. Wir haben bisher die Wahrſcheinlichkeit desjenigen geſucht, der in mehrern Verſuchen etwas einmal zu leiſten unternimmt, wobei jedoch vorausgeſetzt worden iſt, daſs er auch alsdann gewinnt, wenn die Begebenheit mehr als einmal geſchiehet. Nun gehen wir weiter fort, um die Wahrſcheinlichkeit desjenigen zu finden, der in mehrern Verſuchen etwas $\left.\begin{cases}\text{präciſe}\\ \text{höchſtens}\\ \text{wenigſtens}\end{cases}\right\}$ 1, 2, 3, 4, ... *r* mal zu leiſten unternimmt.

§. 23.*

Aufgabe. *Man würfle fünfmal hinter einander mit zwei Würfeln. Was iſt die Wahrſcheinlichkeit, juſt dreimal zehn Augen, und zweimal neun Augen zu werfen?*

Auflösung. I. Vermöge (§. 2.) iſt die Anzahl der Arten, auf welche die erſte Begebenheit: mit zwei Würfeln zehn Augen zu werfen, in drei Verſuchen ſich ereignen kann, $= 3^3$ oder 27; und die Anzahl der Arten, auf welche die zweite Begebenheit: mit zwei Würfeln neun Augen zu werfen, in zwei Verſuchen ſich ereignen kann, $= 4^2$ oder 16. Aber jede Art die zweite Begebenheit zweimal hervorzubringen, kann mit jeder Art die erſte Begebenheit dreimal hervorzubringen, auf $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$ oder zehn Arten verbunden werden. Folglich iſt die Anzahl der Arten, die erſte Begebenheit dreimal, und die zweite Begebenheit zweimal, in fünf Verſuchen zu erhalten $= \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 4^2 \cdot 3^3$ oder 4320, welche Zahl der Zähler der geſuchten Wahrſcheinlichkeit iſt. Der Nenner iſt (aus § 2.) $= 36^5$ oder 60466176. Folglich iſt die geſuchte Wahrſcheinlichkeit =

$$\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot \frac{4^2 \cdot 3^2}{36^5} = \frac{4320}{60466176} = \frac{135}{1889568}.$$ *W. Z. F.*

II. Zu dieſer Auflöſung ſcheint uns noch nachſtehende Erläuterung zu geben, nöthig zu ſein: Wir wollen unter *a*, *b*, *c*, diejenigen drei Fälle verſtehen, welche die erſte Begebenheit in einem Verſuche geben, und unter *a'*, *b'*, *c'*, *d'* diejenigen vier Fälle, welche die zweite Begebenheit in einem Verſuche geben; ſo laſſen ſich alle Arten, auf welche die erſte Begebenheit in drei Verſuchen hervorgebracht werden kann, durch die Glieder nachfolgender Tafel darſtellen:

a a a	*b a a*	*c a a*
a a b	*b a b*	*c a b*
a a c	*b a c*	*c a c*
a b a	*b b a*	*c b a*
a b b	*b b b*	*c b b*
a b c	*b b c*	*c b c*
a c a	*b c a*	*c c a*
a c b	*b c b*	*c c b*
a c c	*b c c*	*c c c*

deren Anzahl $= 3^3$ iſt (§. 2.); und gleichfalls laſſen ſich alle gleich mögliche Arten, auf welche die zweite Begebenheit in zwei Verſuchen hervorgebracht werden kann, in folgender Tafel vorſtellen:

a' a'	*b' a'*	*c' a'*	*d' a'*
a' b'	*b' b'*	*c' b'*	*d' b'*
a' c'	*b' c'*	*c' c'*	*d' c'*
a' d'	*b' d'*	*c' d'*	*d' d'*

worin die Anzahl der Glieder $= 4^2$ iſt. Jede dieſer Arten, die zweite Begebenheit zweimal hervorzubringen, wie z. B. *b' d'* iſt, kann mit jeder der Arten, die erſte Begebenheit dreimal hervorzubringen, z. B. mit *b a c*, auf $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2}$ d. i. zehn Arten verbunden werden, wie fol-

gende Tafel zeigt:

$b'd'bac$	$b'bd'ac$	$b'bad'c$	$b'bacd'$
	$bb'd'ac$	$bb'ad'c$	$bb'acd'$
		$bab'd'c$	$bab'cd'$
			$bacb'd'$

in welcher offenbar die Anzahl der Glieder so groſs als die Menge der Verbindungen nach 2 von 5 Dingen ist; denn es kann sich ereignen

b' im 1sten u. d' im 2ten;	b' im 1sten u. d' im 3ten;
	b' im 2ten u. d' im 3ten;
b' im 1sten u. d' im 4ten;	b' im 1sten u. d' im 5ten
b' im 2ten u. d' im 4ten;	b' im 2ten u. d' im 5ten
b' im 3ten u. d' im 4ten;	b' im 3ten u. d' im 5ten
	b' im 4ten u. d' im 5ten

Versuche. Wobei jedoch zu merken, daſs die Aufeinanderfolge der Buchstaben in diesen Tafeln nicht verändert werden darf. So giebt auch folgende Tafel:

$bacb'd'$	$bab'cd'$	$bab'd'c$
	$bb'acd'$	$bb'ad'c$
		$bb'd'ac$
	$b'bacd'$	$b'bad'c$
		$b'bd'ac$
		$b'd'bac$

$\frac{5\cdot4\cdot3}{1\cdot2\cdot3} = 10$ Verbindungen. Und eben so verhält es sich mit einer jeden Combination eines Gliedes der einen, mit einem Gliede der andern Tafel.

§. 24.*

Aufgabe.

Man würfle achtmal hinter einander mit einem gemeinen Spielwürfel. Wie groſs wird die Wahrscheinlichkeit ſein, juſt dreimal ein As, und fünfmal zwei Augen zu werfen?

Auflösung.

Aus (§. 2.) iſt die Anzahl der gleich möglichen Arten, auf welche die erſte Begebenheit in drei Verſuchen ſich ereignen kann, $= 1^3 = 1$; eben ſo groſs als die Anzahl der Arten: 1^5, auf welche die zweite Begebenheit in fünf Verſuchen ſich ereignen kann. Jene werde durch *a a a*, und dieſe durch $a' a' a' a' a'$ ausgedrükt; ſo kann die einzige Art *a a a* im

1sten 2ten u. 3ten;	1sten 2ten u. 4ten;	1sten 2ten u. 5ten;	1sten 2ten u. 6ten;	1sten 2ten u. 7ten;	1sten 2ten u 8ten
	1 — 3 — 4	1 — 3 — 5	1 — 3 — 6	1 — 3 — 7	1 — 3 — 8
		1 — 4 — 5	1 — 4 — 6	1 — 4 — 7	1 — 4 — 8
			1 — 5 — 6	1 — 5 — 7	1 — 5 — 8
				1 — 6 — 7	1 — 6 — 8
					1 — 7 — 8
	2ten 3ten u. 4ten;	2ten 3ten u. 5ten;	2ten 3ten u. 6ten;	2ten 3ten u. 7ten;	2ten 3ten u. 8ten
		2 — 4 — 5	2 — 4 — 6	2 — 4 — 7	2 — 4 — 8
			2 — 5 — 6	2 — 5 — 7	2 — 5 — 8
				2 — 6 — 7	2 — 6 — 8
					2 — 7 — 8
		3ten 4ten u. 5ten;	3ten 4ten u. 6sten;	3ten 4ten u. 7ten;	3ten 4ten u. 8ten
			3 — 5 — 6	3 — 5 — 7	3 — 5 — 8
				3 — 6 — 7	3 — 6 — 8
					3 — 7 — 8
			4ten 5ten u. 6sten;	4ten 5ten u. 7ten;	4ten 5ten u. 8ten
				4 — 6 — 7	4 — 6 — 8
					4 — 7 — 8
				5ten 6sten u. 7ten;	5ten 6sten u. 8ten
					5 — 7 — 8
					6sten 7ten u. 8ten

Ver-

Verſuche ſich ereignen. Aber dieſe Tafel enthält die Menge aller Verbindungen nach 3 von acht (oder nach 8 − 3 d. i. 5 von 8) Dingen, und giebt alſo $\frac{8.7.6}{1.2.3} = 56$ Verbindungen; welche Zahl der Zähler der geſuchten Wahrſcheinlichkeit iſt. Der Nenner derſelben iſt $= 6^8 =$ 1679616; folglich iſt die geſuchte Wahrſcheinlichkeit $=$ $\frac{8.7.6}{1.2.3} . \frac{1^5 . 1^3}{6^8}$ oder $\frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5} . \frac{1^5 . 1^3}{6^8} = \frac{56}{1679616} = \frac{7}{209952}$. *W. Z. F.*

§. 25.

Lehrsatz. *Man nehme überhaupt an, daſs 1) zwei verſchiedene Begebenheiten von einer und ebenderſelben Handlung oder eben dem Zuſtande abhängig ſind; 2) n die Anzahl der Fälle iſt, welche die erſte von dieſen beiden Begebenheiten in einem Verſuche geben, und q die Anzahl der Fälle iſt, welche die zweite Begebenheit in einem Verſuche geben; 3) keiner dieſer Fälle die beiden Begebenheiten zugleich giebt. Ich ſage: die Anzahl der Arten juſt r mal die erſte Begebenheit und juſt t mal die zweite Begebenheit in (r + t) Verſuchen zu erhalten, iſt*

$$\frac{(r+t)....(r+1)}{1.2....t} . n^r . q^t \text{ oder } \frac{(r+t)....(t+1)}{1.2....r} . n^r . q^t.$$

Und daher, wenn m die Anzahl aller Fälle in einem Verſuche bedeutet, die Wahrſcheinlichkeit eben erwähnter Begebenheit $=$

$$\frac{(r+t)....(r+1)}{1.2....t} . \frac{n^r . q^t}{m^{r+t}}.$$

Beweis. Es ſeien *a, b, c, d,* − die *n* Fälle, welche die erſte Begebenheit in einem Verſuche geben, *a′ b′ c′ d′* − die *q* Fälle, welche die zweite Begebenheit in einem Verſuche geben; ſo erhellet aus dem erſten Lehrſatze (§. 2.) daſs die Anzahl der Arten, auf welche die erſte Begebenheit in *r* Verſuchen ſich ereignen kann, $= n^r$,

und die Anzahl der Arten, auf welche die zweite Begebenheit in t Verſuchen ſich ereignen kann, $= q^t$ iſt.

Für den Fall alſo, daſs

$$t = \left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ t \end{array}\right\}; \text{ können die} \left\{\begin{array}{l} 1 \\ 1 \text{ oder } 2 \\ 1, 2 \text{ oder } 3 \\ 1, 2, 3 \text{ oder } 4 \\ \vdots \\ 1, 2, 3 \ldots\ldots \text{ oder } t \end{array}\right\} \text{Fälle,}$$

aus denen eine jede von den $\left\{\begin{array}{c} q^1 \\ q^2 \\ q^3 \\ q^4 \\ \vdots \\ q^t \end{array}\right\}$ Arten, auf welche einige von den q Fällen a', b', c', d' – ſich

in $\left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \vdots \\ t \end{array}\right\}$ Verſuchen ereignen können, zuſammengeſetzt iſt, ohne die Ordnung zu unterbrechen, in der ſie auf einander folgen, mit den Fällen, welche die erſte Begebenheit geben, verbunden werden, und folglich im

[1sten,	2ten,	3ten	4ten	etc.	$(r + 1)$ ten]
1sten u. 2ten,	1sten u. 3ten,	1sten u. 4ten	etc.		1sten u. $(r + 2)$ ten
	2 —	3 — 2 — 4 —	—		
		3 — 4 —	—		
			—		
1sten 2ten u. 3ten,	1sten 2ten u. 4ten,		etc.		1sten 2ten u. $(r + 3)$ ten
			—		
	1 — 3 — 4 —		—		
			—		
	2ten 3ten u. 4ten		etc.		
			—		
			—		
1sten 2ten 3ten u. 4ten,	etc.				1sten 2ten 3ten u. $(r + 4)$ ten
	—				
	—				

.

Verfuche fich ereignen; welches auf

$$\left\{\begin{array}{l} \cdot\,[r+1] \\ \left[\dfrac{(r+2)\,(r+1)}{1\;.\;2}\right] \\ \left[\dfrac{(r+3)(r+2)(r+1)}{1\;.\;2\;.\;3}\right] \\ \left[\dfrac{(r+4)\,(r+3)(r+2)\,(r+1)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4}\right] \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \left[\dfrac{(r+t)\;.\;.\;.\;.\;(r+1)}{1\;.\;2\;.\;.\;.\;.\;.\;t}\right] \end{array}\right\}$$

Arten geschehen kann. Folglich ist (t unbestimmt gelassen) die Anzahl der Arten, auf welche die erste Begebenheit just r mal, und die zweite just t mal in $(r+t)$ Versuchen hervorgebracht werden kann, d. i. der Zähler der Wahrscheinlichkeit $= \dfrac{(r+t)\ldots.(r+1)}{1\;.\;2\ldots.t}\;.\;n^r\;.\;q^t$ oder weil die Anzahl der Verbindungen von $r+t$ Dingen nach t, der nach $(r+t)-t=r$ von $r+t$ gleich ist, $= \dfrac{(r+t)\ldots.(t+1)}{1\;.\;2\ldots.\;r}\;.\;n^r\;.\;q^t$; auf welche letztre Formel man auch durch die vorigen Schlüsse gekommen sein würde, wenn man die Betrachtung mit r anstatt t angefangen hätte. *W. Z. E.*

Weil dieser Beweis für einige Leser zu abstrakt sein dürfte; so wollen wir ihn jetzt, um ihn sinnlicher zu machen, auf einen besondern Fall anwenden.

Man setze $n=3$, $q=4$, $r=3$, $t=2$; so geben jede 1 oder 2 Fälle, woraus eine jede von den 4^2 Arten die 2te Begebenheit in zwei Versuchen hervorzubringen, bestehet, und die alle durch folgende Tafel dargestellet werden:

$a'\,a'$	$b'\,a'$	$c'\,a'$	$d'\,a'$
$a'\,b'$	$b'\,b'$	$c'\,b'$	$d'\,b'$
$a'\,c'$	$b'\,c'$	$c'\,c'$	$d'\,c'$
$a'\,d'$	$b'\,d'$	$c'\,d'$	$d'\,d'$

verbunden, ohne Unterbrechung der Ordnung, in der sie auf einander folgen, mit jeder von den 3^3 Arten, auf

welche die erste Begebenheit in drei Versuchen sich ereignen kann, und die folgende Tafel angiebt:

a a a	*b a a*	*c a a*
a a b	*b a b*	*c a b*
a a c	*b a c*	*c a c*
a b a	*b b a*	*c b a*
a b b	*b b b*	*c b b*
a b c	*b b c*	*c b c*
a c a	*b c a*	*c c a*
a c b	*b c b*	*c c b*
a c c	*b c c*	*c c c*

überhaupt $\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} \cdot 4^2 \cdot 3^3$ gleich mögliche Arten, auf welche die erste Begebenheit dreimal und die zweite zweimal in fünf Versuchen erhalten werden kann. (Man vergleiche §. 23. II.)

* *Zum Beispiel.* Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, dafs, wenn man viermal hinter einander zwei Würfel auf einen Tisch wirft, just zweimal die Augen 5 und 4, und zweimal 3 und 2 fallen werden?

Hier ist $n=2$, $q=2$, $m=36$, $r=2$, $t=2$, $r+t=4$, folglich $\frac{(r+t)\ldots(r+1)}{1 \cdot 2 \ldots t} \cdot \frac{n^r \cdot q^t}{m^{r+t}} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cdot \frac{2^2 \cdot 2^2}{36^4} = \frac{1}{17496}$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

§. 26.*

Lehrsatz. *Wenn von einer und ebenderselben Handlung oder ebendemselben Zustande drei verschiedene Begebenheiten abhängen, so dafs* $\begin{Bmatrix} n \\ q \\ q' \end{Bmatrix}$ *die Anzahl der Fälle ist, welche die* $\begin{Bmatrix} \text{1ste} \\ \text{2te} \\ \text{3te} \end{Bmatrix}$ *Begebenheit in einem Versuche geben, und unter allen diesen Fällen keine vorhanden*

sind, die mehr als eine von diesen Begebenheiten zugleich geben: so ist die Anzahl der gleich möglichen Arten, auf welche in $(r+t+t')$ Versuchen die erste Begebenheit just r mal, die zweite t mal, die dritte t' mal sich ereignen kann,

$$= \frac{(r+t+t')\ldots(r+1)}{1.2\ldots(t+t')} \cdot \frac{(t+t')\ldots(t+1)}{1.2\ldots t'} \cdot n^r \cdot q^t \cdot q'^{t'}.$$

Und daher, m für die Anzahl aller Fälle, die von der gegebenen Handlung, Bewegung, oder dem gegebenen Zustande abhängen, in einem Versuche angenommen, die Wahrscheinlichkeit just r mal die erste, t mal die zweite, und t' mal die dritte Begebenheit in $(r+t+t')$ Versuchen zu erhalten, $= \frac{(r+t+t')\ldots(r+1)}{1.2\ldots(t+t')} \cdot \frac{(t+t')\ldots(t+1)}{1.2\ldots t'} \times$

$$\frac{n^r \cdot q^t \cdot q'^{t'}}{m^{r+t+t'}} \text{ oder } \frac{(r+t+t')\ldots(r+1)}{1.2\ldots t.1.2\ldots t'} \cdot \frac{n^r \cdot q^t \cdot q'^{t'}}{m^{r+t+t'}}.$$

Beweis. Man weis, daſs die Anzahl der Arten, auf welche die zweite Begebenheit juſt t mal, und die dritte juſt t' mal in $(t+t')$ Verſuchen ſich ereignen kann, folgende iſt:

$$\frac{(t+t')\ldots(t+1)}{1.2\ldots t'} \cdot q^t \cdot q'^{t'} \text{ (§. 25.);}$$

Nun iſt die Anzahl der Arten, auf welche die erſte Begebenheit in r Verſuchen ſich ereignen kann, $= n^r$. Setzt man alſo nach der Ordnung

$$r = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \ldots\ldots \\ r \end{Bmatrix} \text{; ſo können die } \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \text{ oder } 2 \\ 1, 2 \text{ oder } 3 \\ 1, 2, 3 \text{ oder } 4 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 1, 2, 3, \ldots \text{ oder } r \end{Bmatrix} \text{ Fälle,}$$

woraus eine jede von den $\left\{\begin{array}{l} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \\ \ldots\ldots \\ n^r \end{array}\right\}$ Arten, auf welche einige von den n Fällen sich in $\left\{\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \ldots \\ r \end{array}\right\}$ Versuchen ereignen können, bestehet, ohne irgend eine Veränderung der Ordnung, in der sie auf einander folgen, mit jedem von den $\frac{(t+t')\ldots\ldots(t+1)}{1.2\ldots\ldots t'} \cdot q^t \cdot q'^{t'}$ Fällen, welche die zweite Begebenheit t mal, und die dritte t' mal in $(t+t')$ Versuchen geben, verbunden werden, und folglich im

$$\left\{\begin{array}{l} [\text{1sten, 2ten, 3ten 4ten,} \ldots\ldots (t+t'+1)\text{ sten}] \\ \left[\begin{array}{l} \text{1sten u. 2ten, 1 u. 3ten} \ldots \text{1 u.} (t+t'+2) \text{ ten} \\ \qquad\qquad 2-3-\ldots\ldots \end{array}\right] \\ \text{etc.} \qquad\qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\}$$

Versuche zum Vorschein kommen; wo

$$\left\{\begin{array}{c} t+t'+1 \\ \frac{(t+t'+2)(t+t'+1)}{1 \;.\; 2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{(t+t'+r)\ldots\ldots(t+t'+1)}{1.2\ldots\ldots r} \end{array}\right\}$$

Arten möglich sind. Folglich ist die gesuchte Zahl der gleich möglichen Arten, auf welche die erste Begebenheit just r mal, die zweite just t mal, und die dritte just t' mal in $(r+t+t')$ Versuchen sich ereignen kann $= \frac{(r+t+t')\ldots\ldots(t+t'+1)}{1.2\ldots\ldots r} \cdot \frac{(t+t')\ldots\ldots(t+1)}{1.2\ldots\ldots t'} \cdot n^r \cdot q^t \cdot q'^{t'}$

oder $\frac{(r+t+t')\ldots(r+1)}{1.2\ldots(t+t')} \cdot \frac{(t+t')\ldots(t+1)}{1.2\ldots t'} \cdot n^r \cdot q^t \cdot q'^{t'}$.

W. Z. E.

§. 27.*

Beispiele. Was ist die Wahrscheinlichkeit just

$$\begin{bmatrix} 3 \text{ mal} & 1 \\ 5 \text{ —} & 2 \\ 2 \text{ —} & 3 \end{bmatrix}$$

in zehn Versuchen mit einem Würfel (oder mit zehn Würfeln in einem Wurfe) zu treffen?

Hier ist $m=6$, $n=1=q=q'$, $r=3$, $t=5$, $t'=2$, folglich die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{10.9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6.7} \cdot \frac{7.6}{1.2} \cdot \frac{1}{6^{10}} = \frac{2520}{60466176} = \frac{315}{7558272}.$$

Was ist die Wahrscheinlichkeit mit drei Würfeln auf einmal ein As, eine Zwei und eine Drei zu werfen?

Hier ist $m=6$, $n=q=q'=r=t=t'=1$, folglich die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{3.2}{1} \cdot \frac{1}{6^3} = \frac{1}{36}.$$

§. 28.*

Zusatz. I. Auf ähnliche Art findet man, wenn vier Begebenheiten gegeben sind, deren Wahrscheinlichkeiten sich wie n, q, q', q'' verhalten, die Wahrscheinlichkeit, daſs in $(r+t+t'+t'')$ Versuchen

die 1ste Begebenheit r mal
— 2te — — t mal
— 3te — — t' mal
— 4te — — t'' mal

geschiehet, =

$$\frac{(r+t+t'+t'')\ldots(r+1)}{1.2\ldots(t+t'+t'')} \cdot \frac{(t+t'+t'')\ldots(t+1)}{1.2\ldots(t'+t'')} \times$$

$$\frac{(t'+t'')\ldots(t'+1)}{1.2\ldots t''}\cdot\frac{n^r \cdot q^t \cdot q'^{t'} q''^{t''}}{m^{r+t+t'+t''}} =$$

$$\frac{(r+t+t'+t'')\ldots\ldots\ldots(r+1)}{1.2\ldots t.\ 1.2\ldots t'.\ 1.2\ldots t''}\cdot\frac{n^r.q^t.q'^{t'}.q''^{t''}}{m^{r+t+t'+t''}}.$$

Denn aus dem vorigen §. 26. ist die Grösse der Wahrscheinlichkeit bekannt, dass die 2te Begebenheit t mal

— 3 — — t' —

— 4 — — t'' —

in $(t+t'+t'')$ Versuchen sich ereignet. Nun kann eine jede von den n^r Arten, auf welche die erste Begebenheit sich in r Versuchen ereignen kann, ohne die Ordnung zu unterbrechen, in der die Fälle auf einander folgen, mit einer jeden der Arten die 2te Begebenheit t mal

— 3te — — t' —

— 4te — — t'' —

in $(t+t'+t'')$ Versuchen hervorzubringen, auf

$$\frac{(r+t+t'+t'')\ldots(t+t'+t''+1)}{1.2\ldots\ldots r}$$ das ist

$$\frac{(r+t+t'+t'')\ldots(r+1)}{1.2\ldots(t+t'+t'')}$$ Arten verbunden werden,

wie folgende Tafel für $r = \begin{Bmatrix}1\\2\\3\\\ldots\\r\end{Bmatrix}$ angiebt:

$$\left\{\begin{array}{l}1;\ \ 2;\ \ 3;\ \ 4;\ldots\ldots(t+t'+t''+1)\\1,2;\ 1,3;\ \ldots\ldots—\ldots 1,\ (t+t'+t''+2)\\\quad 2,3;\ \ldots\ldots—\\\qquad\text{etc.}\\\text{etc.}\end{array}\right\}$$ Folglich etc.

II. Für fünf Begebenheiten, deren Wahrscheinlichkeiten in einem Versuche sich wie $n:q:q':q'':q'''$ verhalten, wird also die Wahrscheinlichkeit sein, dass in $(r+t+t'+t''+t''')$ Versuchen

die 1ste	Begebenheit	r	mal
— 2te	— —	t	—
— 3te	— —	t'	—
— 4te	— —	t''	—
— 5te	— —	t'''	—

geschiehet:

$$\frac{(r+t+t'+t''+t''')\ldots.(r+1)}{1.2\ldots.(t+t'+t''+t''')}\cdot\frac{(t+t'+t''+t''')\ldots.(t+1)}{1.2\ldots.(t'+t''+t''')}\times$$

$$\frac{(t'+t''+t''')\ldots.(t'+1)}{1.2\ldots.(t''+t''')}\cdot\frac{(t''+t''')\ldots.(t''+1)}{1.2\ldots.t'''}\times$$

$$n^r.q^t.q'^{t'}.q''^{t''}.q'''^{t'''}.\frac{1}{m^{r+t+t'+t''+t'''}} \quad \text{oder}$$

$$\frac{(r+t+t'+t''+t''')\ldots.(r+1)}{1.2\ldots.t.1.2\ldots.t'.1.2\ldots.t''.1.2\ldots.t'''}.n^r.q^t.q'^{t'}.q''^{t''}.q'''^{t'''}\times$$

$$\frac{1}{m^{r+t+t'+t''+t'''}}.$$ Und so weiter.

III. Für sechs Begebenheiten:

$$\frac{(r+t+t'+t''+t'''+t^{IV})\ldots.(r+1)}{1.2\ldots.t.1.2\ldots.t'.1.2\ldots.t''.1.2\ldots.t'''.1.2\ldots.t^{IV}}\times$$

$$n^r.q^t.q'^{t'}.q''^{t''}.q'''^{t'''}.q^{IV\,t^{IV}}\frac{1}{m^{r+t+t'+t''+t'''+t^{IV}}}.$$

IV. Ueberhaupt also: *Wenn bei so viel verschiedenen Begebenheiten, als man will, die von einer und ebenderselben Handlung, Bewegung, oder ebendemselben Zustande*

$$\textit{abhängen,}\ \left\{\begin{matrix} n \\ q \\ q' \\ q'' \\ \ldots. \\ q^z \end{matrix}\right\}\ \textit{die Anzahl der Fälle ist, welche}$$

$\left.\begin{array}{l}\text{1ste}\\ \text{2te}\\ \text{3te}\\ \text{4te}\\ \cdots\cdots\\ (z+2)\end{array}\right\}$ *Begebenheit in einem Versuche geben, und keiner von allen diesen Fällen mehrere dieser Begebenheiten zugleich giebt, m die Anzahl der Fälle ist, welche von der gegebenen Handlung, Bewegung, oder von dem gegebenen Zustande abhängen; so ist die Wahrscheinlichkeit in* $(r+t+t'+t''+t'''+\ldots+t^z)$ *Versuchen*

just r mal die 1ste Begebenheit
— t — — 2te — —
— t' — — 3te — —
— t'' — — 4te — —
— t''' — — 5te — —
.
— t^z — — (z+2) — —

zu erhalten =

$$\frac{(r+t+t'+t''+t'''+\ldots+t^z)\ldots\ldots\ldots(r+1)}{1.2\ldots t.1.2\ldots t'.1.2\ldots t''.1.2\ldots t'''\ldots 1.2\ldots t^z}\times$$

$$u^r.q^t.q'^{t'}.q''^{t''}.q'''^{t'''}\ldots q^{z\,t^z}.\frac{1}{m^{r+t+t'+t''+t'''+\ldots+t^z}}.$$

Beweis. Denn wenn die Anzahl der günstigen Fälle in $(t+t'+t''+t'''+\ldots+t^z)$ Versuchen

die 2te Begebenheit t mal
— 3te — — t' —
— 4te — — t'' —
.
— (z+2) — — t^z —

zu erhalten, =

$$\frac{(t+t'+t''+t'''+\ldots+t^z)\ldots(t+1)}{1.2\ldots(t'+t''+t'''+\ldots+t^z)}.\frac{(t'+t''+t'''+\ldots+t^z)\ldots(t'+1)}{1.2\ldots(t''+t'''+t^{IV}+\ldots+t^z)}\times$$

$$\frac{(t''+t'''+t^{IV}+\ldots+t^z)\ldots(t''+1)}{1.2\ldots(t'''+t^{V}+t^{V}+\ldots+t^z)}\times\ldots\ldots\ldots\times$$

$$\frac{(t^{z-1}+t^z)\ldots(t^{z-1}+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots\ldots t^z}.q^t.q'^{t'}.q''^{t''}.q'''^{t'''}\ldots\ldots q^{z\,t^z}$$

richtig ist; so kann eine jede von den n^r Arten, auf welche die erste Begebenheit r mal in r Versuchen erhalten werden kann, ohne die Ordnung zu unterbrechen, in der die Fälle, woraus eine jede von den nur erwähnten n^r Arten bestehet, auf einander folgen, mit jeder von den Arten die 2te Begebenheit t mal

— 3te — — t' —
— 4te — — t'' —
.
— $(z+2)$ — — t^z —

in $(t+t'+t''+t'''+\ldots+t^z)$ Versuchen hervorzubringen,

auf $\frac{(r+t+t'+t''+\ldots+t^z)\ldots(t+t'+t''+\ldots+t^z+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots\ldots r}$

das ist $\frac{(r+t+t'+t''+\ldots+t^z)\ldots(r+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots(t+t'+t''+\ldots+t^z)}$ Arten verbunden werden, welches also folgendes Produkt für den Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit giebt:

$$\frac{(r+t+t'+t''+\ldots+t^z)\ldots\ldots(r+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots(t+t'+t''+t'''+\ldots\ldots+t^z)}\times$$

$$\frac{(t+t'+t''+\ldots\ldots+t^z)\ldots\ldots(t+1)}{1\,.\,2\ldots(t'+t''+t'''+\ldots\ldots+t^z)}\times$$

$$\frac{(t'+t''+\ldots+t^z)\ldots(t'+1)}{1.2\ldots(t''+t'''+\ldots+t^z)}.\frac{(t''+t'''+\ldots+t^z)\ldots(t''+1)}{1.2\ldots(t'''+t^{IV}+\ldots+t^z)}\ldots\ldots$$

$$\frac{(t^{z-2}+t^{z-1}+t^z)\ldots(t^{z-2}+1)}{1.2\ldots(t^{z-1}+t^z)}.\frac{(t^{z-1}+t^z)\ldots(t^{z-1}+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots t^z}\times$$

$$n^r.q^t.q'^{t'}.q''^{t''}.q'''^{t'''}\ldots\ldots q^{z\,t^z}=$$

$$\frac{(r+t+t'+t''+\ldots\ldots+t^z)\ldots\ldots\ldots(r+1)}{1.2\ldots t.1.2\ldots t'.1.2\ldots t''.1.2\ldots t'''\ldots1.2\ldots t^{z-1}.1.2\ldots t^z}\times$$

$$n^r.q^t.q'^{t'}.q''^{t''}.q'''^{t'''}\ldots\ldots q^{z\,t^z}.$$

Dafs aber das Produkt $\frac{(t+t'+\ldots+t^z)\ldots(t+1)}{1.2\ldots(t'+\ldots+t^z)}$. etc. für $t+t'+\ldots\ldots+t^z=t+t'$, und für $t+t'+\ldots+t^z=t+t'+t''$ richtig ist, erhellet aus den (§. 25. und 26.) geführten Beweisen. Folglich ist der zu beweisende Satz auch richtig für $r+t+t'+\ldots\ldots+t^z=r+t+t'+t''$; und demnach auch für $r+t+t'+t''+\ldots\ldots+t^z=r+t+t'+t''+t'''$; Und so weiter für alle folgende Werthe von $r+t+t'+t''+\ldots+t^z$ richtig. Endlich ist der Nenner der Wahrscheinlichkeit $= m^{r+t+t'+t''+\ldots+t^z}$.

§. 29.

Beispiele. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit mit einem gemeinen Spielwürfel in zwanzig Würfen hinter einander

3 mal ein As
5 — eine 2
2 — — 3
4 — — 4
5 — — 5
1 — — 6

zu werfen?

Hier ist $r=3$, $t=5$, $t'=2$, $t''=4$, $t'''=5$, $t^{IV}=1$; $r+t+t'+t''+t'''+t^{IV}=x=20$; $m=6$; $n=q=q'=q''=q'''=q^{IV}=1$; also die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{20.19.18.17.16.15.14.13.12.11.10.9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.1.2.1.2.3.4.1.2.3.4.5.1}\cdot\frac{1}{6^{20}}=\frac{56581525}{3526387384 32}.$$

* Was ist die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel in sechs Würfen (oder auf einen Wurf mit sechs

Würfeln) $\left\{\begin{array}{l} 1 \text{ mal ein As} \\ 1 \text{ — eine } 2 \\ 1 \text{ — — } 3 \\ 1 \text{ — — } 4 \\ 1 \text{ — — } 5 \\ 1 \text{ — — } 6 \end{array}\right\}$ zu werfen?

Hier ist $r = t = t' = t'' = t''' = t^{IV} = 1 = n = q = q' = q'' = q''' = q^{IV}$; $x = 6 = m$; folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{6.5.4.3.2}{6^6} = \frac{20}{6^4} = \frac{20}{1296} = \frac{5}{324}$. Man vergleiche Kap. II. §. 9.

§. 30.*

LEHRSATZ. *Wenn die Anzahl der Versuche* $= x > r + t + t' + t'' + \ldots. + t^z$ *ist; so ist die Wahrscheinlichkeit in x Versuchen*

just r mal die 1ste Begebenheit, deren Wahrscheinlichkeit in einem Versuche $= \frac{n}{m}$,

— *t* — — *2te* — — — — — $= \frac{q}{m}$,

— *t'* — — *3te* — — — — — $= \frac{q'}{m}$,

.

— t^z — — $(z+2)$ — — — — — $= \frac{q^z}{m}$

zu erhalten =

$$\frac{x(x-1)(x-2)\ldots.(r+t+t'+t''+\ldots.+t^z+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,(x-r-t-t'-t''-\ldots.-t^z)} \times$$

$$(m-n-q-q'-q''-\ldots-q^z)^{x-r-t-t'-\ldots-t^z} \times$$

$$\frac{(r+t+t'+t''+\ldots.+t^z)\ldots.(r+1)}{1.2\ldots t.1.2\ldots t'.1.2\ldots t''\ldots.1.2\ldots.t^z} . n^r . q^t . q'^{t'} . q''^{t''} \ldots q^{z\,t^z} . \frac{1}{m^x}$$

oder $\dfrac{x(x-1)(x-2)(x-3)\ldots\ldots(r+1)}{1.2\ldots t.1.2\ldots t'\ldots 1.2\ldots t^z.1.2\ldots(x-r-t-t'-\ldots-t^z)} \times$

$$n^r.q^t.q'^{t'}\ldots q^{z\,t^z}.(m-n-q-q'-\ldots-q^z)^{x-r-t-t'-\ldots-t^z}.\frac{1}{m^x}$$

Beweis. Die $m-n-q-q'-q''-\ldots-q^z$ Fälle, welche keine von den bestimmten $(z+2)$ Begebenheiten geben, können in den $(x-r-t-t'-\ldots-t^z)$ Versuchen, wo die Ereigniss keiner von diesen Begebenheiten verlangt wird, auf

$$(m-n-q-q'-\ldots-q^z)^{x-r-t-t'-\ldots-t^z}$$

gleich mögliche Arten sich ereignen (§. 2.): und eine jede von diesen Arten kann, ohne die Ordnung zu verändern, in der die Fälle auf einander folgen, woraus eine jede davon bestehet, mit einer jeden von den

$\dfrac{(r+t+\ldots+t^z)\ldots(r+1)}{1.2\ldots t.1.2\ldots t'\ldots 1.2\ldots t^z}.n^r\ldots q^{z\,t^z}$ Arten, welche das bestimmte Resultat geben, auf $\dfrac{x\ldots(r+t+t'+\ldots+t^z+1)}{1.2\ldots(x-r-t-t'-\ldots-t^z)}$

Arten verbunden werden.

Denn man setze nach der Reihe die Ergänzungen von $r+t+t'+\ldots+t^z$ zu x, oder $x-r-t-t'-\ldots-t^z =$

$\left\{\begin{matrix}1\\2\\3\\\ldots\\x-r-t\ldots-t^z\end{matrix}\right\}$; so giebt folgende Tafel:

$$\left\{\begin{array}{llll} 1; & 2; & 3; \ldots\ldots & (r+t+t'+\ldots+t^z+1) \\ 1,2; & 1,3; & \ldots\ldots & 1,(r+t+t'+\ldots+t^z+2) \\ & 2,3; & \ldots\ldots & \\ & \quad \text{etc.} & & \\ 1,2,3; & 1,2,4; & \ldots\ldots & 1,2,r+t+t'+\ldots+t^z+3 \\ & 1,3,4; & & \\ & \quad \text{etc.} & & \\ \text{etc.} & & & \end{array}\right\}$$

nach der Ordnung die Summen der in ihr vorkommenden Combinationen:

$$\left\{\begin{array}{l} r+t+t'+\ldots+t^z+1 \\ \frac{(r+t+t'+\ldots+t^z+2)(r+t+t'+\ldots+t^z+1)}{1\,.\,2} \\ \frac{(r+t+t'+\ldots+t^z+3)(r+t+t'+\ldots+t^z+2)(r+t+t'+\ldots+t^z+1)}{1\,.\,2\,.\,3} \\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$

und alſo allgemein:

$$\frac{(r+t+t'+\ldots+t^z+(x-r-t-t'-\ldots-t^z))\ldots(r+t+t'+\ldots+t^z+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots(x-r-t-t'-\ldots-t^z)}$$

das iſt $\frac{x\ldots(r+t+t'+\ldots+t^z+1)}{1.2\ldots(x-r-t-t'-\ldots-t^z)}$. *W. Z. E.*

§. 31.

Beispiele. Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit, mit zwei gemeinen Spielwürfeln, in acht Würfen,

$$\left\{\begin{array}{l} 2 \text{ mal } 5 \text{ und } 4 \\ 2 — 3 — 4 \\ 1 — 6 — 6 \\ 1 — 5 — 5 \end{array}\right\}$$ zu werfen?

Man

Man ſetze in der allgemeinen Formel $x=8$; $m=36$; $r=2$; $t=2$; $t'=1$; $t''=1$; $n=2$; $q=2$; $q'=1$; $q''=1$; ſo verwandelt ſie ſich in

$$\frac{8.7}{1.2}\cdot 30^2\,\frac{6.5.4.3}{1\;.\;2}\cdot 2^2\cdot 2^2\cdot\frac{1}{36^8}=\frac{875}{34012224},$$

welches die geſuchte Wahrſcheinlichkeit iſt.

* Was iſt die Wahrſcheinlichkeit mit einem Würfel in zwölf Würfen $\left\{\begin{matrix}\text{1 mal ein As}\\ \text{1 — eine 2}\\ \text{1 — — 3}\\ \text{1 — — 4}\\ \text{1 — — 5}\\ \text{1 — — 6}\end{matrix}\right\}$ zu werfen?

Es iſt $m=6$; $x=12$; $r=t=t'=t''=t'''=t^{IV}=1=n=q=q'=q''=q'''=q^{IV}$; folglich die geſuchte Wahrſcheinlichkeit $=\frac{12.11.10.9.8.7}{1.2.3.4.5.6}\cdot 0^6\cdot\frac{6.5.4.3.2}{1}\cdot\frac{1}{6^{12}}=0$; alſo iſt eine ſolche Begebenheit unmöglich.

* Was iſt die Wahrſcheinlichkeit mit einem Würfel in zwölf Würfen, oder mit zwölf Würfeln in einem Wurfe $\left\{\begin{matrix}\text{1 mal ein As}\\ \text{1 — eine 2}\\ \text{1 — — 3}\end{matrix}\right\}$ zu werfen?

Hier iſt $x=12$; $m=6$; $r=1=t=t'=n=q=q'$; alſo iſt die Wahrſcheinlichkeit =

$$\frac{12\ldots 4}{1.2\ldots 9}\cdot 3^9\cdot\frac{3.2}{1}\cdot\frac{1}{6^{12}}=\frac{12.11.10}{1.2.3}\cdot 3^9\cdot\frac{1}{6^{11}}=\frac{55}{2^9.9}=\frac{55}{4608}.$$

§. 32.

Lehrsatz. *Wenn die Wahrſcheinlichkeit einer Begebenheit in einem Verſuche $\frac{n}{m}$ iſt; ſo iſt die Wahrſchein-*

lichkeit, dass ebendieselbe Begebenheit in x Versuchen just r mal geschehen wird =

$$^{x}R.\frac{n^r}{m^x}.(m-n)^{x-r} \text{ oder } {}^{x}R.\left(\frac{n}{m}\right)^r.\left(1-\frac{n}{m}\right)^{x-r}$$

Beweis. 1. Man setze in der allgemeinen Formel $\frac{(r+t)\ldots.(r+1)}{1.2\ldots.t}.n^r.q^t$ (§. 25.), $q=m-n$, und $t=x-r$;

so bekömmt man:

$$\frac{x(x-1)\ldots.(r+1)}{1.2\ldots.(x-r)}.n^r.(m-n)^{x-r} \text{ oder}$$

$$\frac{x(x-1)\ldots.(x-r+1)}{1.2\ldots.r}.n^r.(m-n)^{x-r},$$ welches der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit ist.

2. Der Nenner der gesuchten Wahrscheinlichkeit ist m^x (§. 2.); folglich ist diese Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{x(x-1)\ldots.(x-r+1)}{1.2\ldots.r}.\frac{n^r}{m^x}.(m-n)^{x-r}. \quad W.Z.E.$$

§. 33.

Beispiele. Wie groſs ist die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfeln in vier Würfen just zweimal 5 und 4 zu werfen?

In der eben gefundenen allgemeinen Formel setzt man $m=36$, $n=2$ (oder da $36:2=18:1$, $m=18$, $n=1$) $x=4$, $r=2$, so bekömmt man $^{x}R.\frac{n^r}{m^x}.(m-n)^{x-r}=\frac{4.3}{1.2}\times\frac{1^2}{18^4}.17^2=\frac{289}{17496}$, welches die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist.

* Ferner ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel in zwei Würfen beidemal ein As zu werfen

$= 1 . \left(\frac{1}{6}\right)^2 . \left(1 - \frac{1}{6}\right)^0 = \frac{1}{36}$; eben ſo groſs als die Wahrſcheinlichkeit, mit zwei Würfeln in einem Wurfe 1 und 1 zu werfen =

$$1 . \left(\frac{1}{36}\right)^1 \left(1 - \frac{1}{36}\right)^0 = \frac{1}{36}.$$

§. 34.*

Für $r = 1$ verwandelt ſich die allgemeine Formel (§. 32.) in $x . \frac{n}{m^x} . (m-n)^{x-1}$ oder $x . \frac{n}{m} . \left(1 - \frac{n}{m}\right)^{x-1}$; welches die Wahrſcheinlichkeit iſt, daſs eine Begebenheit, deren Wahrſcheinlichkeit in einem Verſuche $= \frac{n}{m}$ iſt, in x Verſuchen juſt einmal zum Vorſchein kommen wird.

Z. B. Die Wahrſcheinlichkeit, mit einem Würfel in zwei Würfen juſt einmal ein As zu werfen, iſt $2 . \frac{1}{6} . \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{2-1} = \frac{1}{3} . \frac{5}{6} = \frac{5}{18}$ = der Wahrſcheinlichkeit mit zwei Würfeln in einem Wurfe juſt ein As zu werfen.

Addirt man die Wahrſcheinlichkeit, mit einem Würfel in zwei Würfen juſt einmal ein As zu werfen, oder $\frac{5}{18}$, zu der Wahrſcheinlichkeit mit einem Würfel in zwei Würfen auf jeden Wurf ein As zu werfen; ſo erhält man die Wahrſcheinlichkeit, mit einem Würfel in zwei Würfen entweder nur einmal ein As, oder beidemal ein As, das iſt, wenigſtens ein As zu werfen =

$$\frac{5}{18} + \frac{1}{36} = \frac{11}{36} \text{ wie zuvor §. 12.}$$

Die Wahrscheinlichkeit mit einem Würfel in drei Würfen nur einmal ein As zu werfen, ist $= 3 \cdot \frac{1}{6} \times \left[1 - \frac{1}{6}\right]^2 = \frac{25}{72} < \frac{91}{216}$ (§. 12. u. 4.).

§. 35.*

Wenn $r = x$; so giebt die allgemeine Formel in §. 32: $\left[\frac{n}{m}\right]^x$. S. §. 3.

Wenn $r = 0$; so bekömmt man aus eben dieser Formel $\left[1 - \frac{n}{m}\right]^x$ oder $\left[\frac{m-n}{m}\right]^x$. Ebendaselbst.

§. 36.*

Ist in jedem Versuche die Anzahl der Fälle verschieden, nämlich im

den, näml. im 1sten	2ten	3ten	4ten	5ten etc. Versuche
die Anzahl aller Fälle $= m$	m'	m''	m'''	m^{IV}
die Anzahl der günstigen $= n$	n'	n''	n'''	n^{IV}
die Anzahl der widrigen $= m-n$	$m'-n'$	$m''-n''$	$m'''-n'''$	$m^{IV}-n^{IV}$

und soll der Spielende, z. B. bei fünf Versuchen in den drei ersten, die bestimmte Begebenheit hervorbringen, so ist seine Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{n \cdot n' \cdot n'' \cdot (m''' - n''') \cdot (m^{IV} - n^{IV})}{m \cdot m' \, m'' \cdot m''' \cdot m^{IV}} \quad \text{oder}$$

$$\frac{n}{m} \cdot \frac{n'}{m'} \cdot \frac{n''}{m''} \left(1 - \frac{n'''}{m'''}\right) \cdot \left(1 - \frac{n^{IV}}{m^{IV}}\right).$$

Denn ein jeder von den n günstigen Fällen der ersten Begebenheit kann mit jedem von den n' günstigen Fällen der zweiten Begebenheit verbunden werden; dieses giebt $n \cdot n'$ Fälle; davon ein jeder wiederum mit einem jeden von den n'' günstigen Fällen der dritten Begeben-

heit verbunden werden kann, welches $n \,.\, n' \,.\, n''$ Fälle giebt. Desgleichen kann ein jeder von den $m''' - n'''$ widrigen Fällen der vierten Begebenheit mit den $m^{iv} - n^{iv}$ widrigen Fällen der fünften Begebenheit verbunden werden, wodurch man das Produkt $(m''' - n''')\,(m^{iv} - n^{iv})$ erhält. Da nun endlich auch ein jeder dieser $(m''' - n''')(m^{iv} - n^{iv})$ Fälle mit jedem der $n \,.\, n' \,.\, n''$ erstern verbunden werden kann; so ist der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit $= n \,.\, n' \,.\, n'' \,.\, (m''' - n''') \,.\, (m^{iv} - n^{iv})$. Auf eine ähnliche Art ergiebt sich für den Nenner dieser Wahrscheinlichkeit, das Produkt $m \,.\, m' \,.\, m'' \,.\, m''' \,.\, m^{iv}$. *W. Z. E.*

Man vielfältigt also das Produkt aus der Anzahl der günstigen Fälle in den einzelnen Versuchen, wo die Begebenheit geleistet werden soll, mit dem Produkte der Anzahl der widrigen Fälle in den Versuchen, in welchen die Begebenheit nicht geleistet werden soll, und dividirt das herausgekommene Produkt durch das Produkt aus der Anzahl aller Fälle in allen Versuchen: so giebt der Quotient die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

§. 37.*

Beispiele. Im {1sten Versuche soll mit 1 / 2ten — — — 2 / 3ten — — — 3 / 4ten — — — 4 / 5ten — — — 5} Würfeln geworfen werden; man sucht die Wahrscheinlichkeit:

im {1sten Versuche ein As / 2ten Versuche wenigstens ein As / 3ten Versuche wenigstens ein As / 4ten Versuche kein As / 5ten Versuche kein As} zu werfen.

Hier iſt (aus §. 12.)

	im 1ſten	2ten	3ten	4ten	5ten Verſuche
die Anzahl aller Fälle	= 6	36	216	1296	7776
der günſtigen	= 1	11	91	671	4651
der widrigen	= 5	25	125	625	3125

folglich die geſuchte Wahrſcheinlichkeit =

$$\frac{1 \,.\, 11 \,.\, 91 \,.\, 625 \,.\, 3125}{6 \,.\, 36 \,.\, 216 \,.\, 1296 \,.\, 7776} \text{ oder } \frac{1}{6} \,.\, \frac{11}{36} \,.\, \frac{91}{216} \,.\, \frac{625}{1296} \times \frac{3125}{7776}.$$

Die Wahrſcheinlichkeit, in jedem der drei letzten Verſuche wenigſtens ein As zu werfen, iſt =

$$\frac{5}{6} \,.\, \frac{25}{36} \,.\, \frac{91}{216} \,.\, \frac{671}{1296} \,.\, \frac{4651}{7776}.$$

Die Wahrſcheinlichkeit, daſs ſolches im 1ſten, 3ten und 5ten Verſuche geſchehen wird, iſt

$$\frac{1}{6} \,.\, \frac{25}{36} \,.\, \frac{91}{216} \,.\, \frac{625}{1296} \,.\, \frac{4651}{7776}.$$

Und ſo weiter.

§. 38.*

Wenn (§. 36.)

$$m = m' = m'' = m''' = m^{IV} = \text{etc.}$$
$$n = n' = n'' = n''' = n^{IV} = \text{etc.}$$
$$m - n = m' - n' = m'' - n'' = m''' - n''' = m^{IV} - n^{IV} = \text{etc.}$$

ſo verwandelt ſich die allgemeine Formel:

$$\frac{n \,.\, n' \,.\, n'' \,.\, (m''' - n''') \,.\, (m^{IV} - n^{IV})}{m \,.\, m' \,.\, m'' \,.\, m''' \,.\, m^{IV}} \text{ in } \frac{n^3 \,.\, (m-n)^2}{m^5}.$$

Bedeutet alſo x die Anzahl der Verſuche; r die Zahl derſelben, in welchen eine beſtimmte Begebenheit geleiſtet werden ſoll; alſo $x - r$ die Zahl derjenigen Verſuche, in welchen dieſe Begebenheit nicht geleiſtet werden ſoll: ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs die beſtimm-

te Begebenheit, deren Wahrscheinlichkeit in einem Versuche $= \frac{n}{m}$ ist, in r angewiesenen Versuchen sich ereignen wird, $= \frac{n^r (m-n)^{x-r}}{m^x}$ oder $\left[\frac{n}{m}\right]^r \cdot \left[1-\frac{n}{m}\right]^{x-r}$.

§. 39.*

Beispiel. Was ist die Wahrscheinlichkeit mit zwei Würfeln in vier Würfen just zweimal, und zwar beim zweiten und vierten Wurfe, 5 und 4 zu werfen?

Man setze in der eben gefundenen allgemeinen Formel, $m=18$, $n=1$, $x=4$, $r=2$; so erhält man die gesuchte Wahrscheinlichkeit $=$

$$\left[\frac{1}{18}\right]^2 \cdot \left[1-\frac{1}{18}\right]^2 = \frac{289}{104976} = \frac{1}{6} \cdot \frac{289}{17496}.$$

Man vergleiche §. 33. Beispiel 1.

§. 40.*

Soll die bestimmte Begebenheit in r Versuchen zum Vorschein kommen, so, dass keine gewissen Versuche, worinnen sie geschehen soll, namhaft gemacht werden; so muss, um die Wahrscheinlichkeit für diesen Fall zu erhalten, die (§. 38.) gefundene allgemeine Formel noch mit der Menge aller Verbindungen nach r von x Dingen gevielfältigt werden; weil sich alsdann die Begebenheit im

$$\left[\begin{matrix} 1, 2, \ldots r; \; 1, 2, \ldots (r-1), (r+1); \ldots 1, 2, \ldots (r-1), x \\ 1, 2, \ldots (r-2), r, (r+1); \ldots \end{matrix}\right] \text{ten}$$

Versuche ereignen kann. Man bekömmt also für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{x.(x-1)\ldots(x-r+1)}{1.2\ldots.r} \cdot \left[\frac{n}{m}\right]^r \cdot \left[1-\frac{n}{m}\right]^{x-r};$$

wie in §. 32.

§. 41.

LEHRSATZ. *Die Wahrscheinlichkeit, daſs eine Begebenheit, deren Wahrscheinlichkeit in einem Versuche* $\frac{n}{m}$ *iſt, in x Versuchen höchſtens r mal geſchiehet, iſt* =

$$\left[1-\frac{n}{m}\right]^x \cdot \left(1+x.\frac{n}{m-n}+\frac{x(x-1)}{1\,.\,2}\left[\frac{n}{m-n}\right]^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\left[\frac{n}{m-n}\right]^3+\ldots+\frac{x\ldots(x-r+1)}{1.2.3\ldots r}\left[\frac{n}{m-n}\right]^r\right).$$

BEWEIS. Wenn man in der (§. 32. oder 40.) gefundenen allgemeinen Formel anſtatt r nach und nach alle ganze Zahlen von 0 bis r ſetzt, und die ſolchergeſtalt erhaltenen Produkte zuſammen addirt; ſo bekömmt man zur Summe die geſuchte Wahrſcheinlichkeit, welche alſo ſein wird:

$$\left[1-\frac{n}{m}\right]^x \cdot \left(1+x.\frac{n}{m-n}+\ldots+\frac{x\ldots(x-r+1)}{1\,.\,2\ldots r}.\left[\frac{n}{m-n}\right]^r\right).$$

W. Z. E.

§. 42.*

Setzt man in der vorhin (§. 41.) gefundenen allgemeinen Formel $r=1$; ſo bekömmt man die Wahrſcheinlichkeit, daſs eine Begebenheit, deren Wahrſcheinlichkeit in einem Verſuche $= \frac{n}{m}$ iſt, in x Verſuchen höchſtens einmal geſchehen wird, =

$$\left[1-\frac{n}{m}\right]^x \cdot \left[1+x.\frac{n}{m-n}\right].$$

§. 43.

BEISPIEL. Es kauft jemand drei Nummern im Zahlen-Lotto. Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs dieſe drei Nummern höchſtens einmal in den vier nächſten Ziehungen herauskommen werden?

Hier ist $n=1$; $m=11748$ (Kap. V. §. 20. Beisp. 1.); $x=4$; $r=1$; also die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\left[1-\frac{n}{m}\right]^x \cdot \left[1+x.\frac{n}{m-n}\right] = \left[\frac{11747}{11748}\right]^4 \cdot \left[1+4.\frac{1}{11747}\right] =$$

$$\frac{11747^3}{11748^4}.11751 = \frac{6349426172124991}{6349426448124672}.$$

§. 44.*

Für $r=x$ verwandelt sich die allgemeine Formel (§. 41.) in $\left[1-\frac{n}{m}\right]^x \cdot \left[1+\frac{n}{m-n}\right]^x = \left[\frac{m-n}{m}.\frac{m}{m-n}\right]^x = 1$, wie gehörig.

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Begebenheit (in §. 41.) in x Versuchen höchstens $(x-1)$ mal ereignen wird, ist

$$\left[1-\frac{n}{m}\right]^x \cdot \left(1+x.\frac{n}{m-n}+\frac{x.(x-1)}{1.2}.\left[\frac{n}{m-n}\right]^2+\ldots\right.$$

$$\left.+x.\left[\frac{n}{m-n}\right]^{x-1}\right) =$$

$$\left[1-\frac{n}{m}\right]^x.\left(\left[1+\frac{n}{m-n}\right]^x-\left[\frac{n}{m-n}\right]^x\right)=$$

$$1-\left[1-\frac{n}{m}\right]^x\left[\frac{n}{m-n}\right]^x =$$

$$1-\left[\frac{n}{m-n}-\frac{n^2}{m(m-n)}\right]^x =$$

$$1-\left[\frac{mn-n^2}{m(m-n)}\right]^x = 1-\left[\frac{n}{m}\right]^x,$$

wie §. 11; und hievon ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit $\left[\frac{n}{m}\right]^x$, dass sich die Begebenheit in allen x Versuchen ereignen wird, wie §. 3.

§. 45.

Lehrsatz. *Wenn die Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit in einem Versuche* $= \frac{n}{m}$ *ist; so ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Begebenheit wenigstens* **r** *mal in* **x** *Versuchen geschehen wird,* =

$$1 - \left[1 - \frac{n}{m}\right]^x \cdot \left(1 + x \cdot \frac{n}{m-n} + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left[\frac{n}{m-n}\right]^2 + \ldots + \frac{x(x-1)\ldots(x-r+2)}{1 \cdot 2 \ldots (r-1)} \left[\frac{n}{m-n}\right]^{r-1}\right)$$

Beweis. Sie ist die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit von derjenigen, dass die Begebenheit in x Versuchen höchstens $(r-1)$ mal geschehen wird, und die man aus der allgemeinen Formel §. 41. findet, wenn man $r-1$ anstatt r schreibt. *W. Z. E.*

§. 46.

Zusatz. Für $r=1$ verwandelt sich die eben gefundene allgemeine Formel in folgende: $1 - \left[1 - \frac{n}{m}\right]^x$, welche bereits im dritten Lehrsatze (§. 5) bewiesen worden ist; und wenn $r=x$, so verwandelt sich eben diese Formel in:

$$1 - \left[1 - \frac{n}{m}\right]^x \left(\left[1 + \frac{n}{m-n}\right]^x - \left[\frac{n}{m-n}\right]^x\right) =$$

$$+ \left[1 - \frac{n}{m}\right]^x \left[\frac{n}{m-n}\right]^x = \left[\frac{n}{m}\right]^x;$$

(S. Kap. II. §. 7. und im gegenwärt. Kap. §. 3.).

§. 47.

Hätte man in der allgemeinen Formel des §. 32. anstatt r nach und nach alle ganze Zahlen von r bis x gesetzt, und die vermittelst dieser Substitutionen heraus-

gekommenen Produkte zuſammen addirt; ſo würde man den Ausdruk

$$\left[\frac{n}{m}\right]^x \cdot \left(1+x\cdot\frac{m-n}{n}+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}\cdot\left[\frac{m-n}{n}\right]^2+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{x\cdot(x-1)\,.\,.\,.\,.\,.\,(x-r+1)}{1\cdot 2\,.\,.\,.\,.\,.\,r}\cdot\left[\frac{m-n}{n}\right]^{x-r}\right)$$
$$\left(=\left[n^x+x\,n^{x-1}(m-n)+\frac{x\cdot(x-1)}{1\cdot 2}\cdot n^{x-2}(m-n)^2+\ldots\right.\right.$$
$$\left.+\frac{x\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(x-r+1)}{1\cdot 2\,.\,.\,.\,.\,.\,r}\cdot n^r\,(m-n)^{x-r}\right]:m^x$$
$$=\left[m^x-(m-n)^x-x\cdot(m-n)^{x-1}n-\frac{x\,(x-1)}{1\cdot 2}(m-n)^{x-2}n^2-\ldots\right.$$
$$\left.\left.\ldots-\frac{x\ldots(x-r+2)}{1\cdot 2\ldots(r-1)}\cdot n^{r-1}\cdot(m-n)^{x-r+1}\right]:m^x\right)$$

gefunden haben, welcher mit dem im Lehrſatz §. 45. zu einerlei Wahrſcheinlichkeit gehört, aber eine andere Geſtalt als dieſer hat. Folglich wird auch

$$1-\left[\frac{n}{m}\right]^x\cdot\left\{1+x\cdot\frac{m-n}{n}+\ldots\ldots\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{x\,.\,.\,.\,.\,.\,(x-r+1)}{1\cdot 2\,.\,.\,.\,.\,.\,r}\cdot\left[\frac{m-n}{n}\right]^{x-r}\right\}.$$
$$\left(=\left[(m-n)^x+x\cdot(m-n)^{x-1}n+\frac{x\,(x-1)}{1\cdot 2}\times\right.\right.$$
$$(m-n)^{x-2}n^2+\ldots+\frac{x\,.\,.\,.\,.\,.\,(x-r+2)}{1\cdot 2\,.\,.\,.\,.\,(r-1)}\times$$
$$\left.\left.(m-n)^{x-r+1}\cdot n^{r-1}\right]:m^x\right)$$

mit

$$\left[1-\frac{n}{m}\right]^x\cdot\left\{1+x\cdot\frac{n}{m-n}+\ldots\ldots\right.$$

$$+\frac{x\ldots\ldots(x-r+2)}{1.2\ldots\ldots(r-1)}.\left[\frac{n}{m-n}\right]^{r-1}\Big\}\ (§.\ 41.)$$

zu einerlei Wahrscheinlichkeit gehören.

§. 48.*

Es ist also die Wahrscheinlichkeit desjenigen, der in zwei Versuchen etwas zweimal zu leisten unternimmt, $\frac{n^2}{m^2}$; und die Wahrscheinlichkeit des Gegenspielers $= \frac{(m-n)^2+2(m-n)n}{m^2}$.

Desgleichen ist die Wahrscheinlichkeit desjenigen, der in drei Versuchen etwas (wenigstens) zweimal zu leisten unternimmt, $= \frac{n^3+3n^2(m-n)}{m^3}$; und des Gegenspielers $= \frac{(m-n)^3+(m-n)^2 n}{m^3}$.

Ferner ist die Wahrscheinlichkeit desjenigen, der in vier Versuchen etwas zweimal zu leisten unternimmt, =

$$\frac{n^4+4(m-n)n^3+6(m-n)^2 n^2}{m^4};$$

des Gegenspielers Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{(m-n)^4+4(m-n)^3 n}{m^4}.$$

Will jemand in drei Versuchen etwas dreimal leisten, so ist seine Wahrscheinlichkeit $= \frac{n^3}{m^3}$, und die entgegengesetzte =

$$\frac{(m-n)^3+3(m-n)^2 n+3(m-n)n^2}{m^3}.$$

Die Wahrſcheinlichkeit, daſs eine Begebenheit in x Verſuchen wenigſtens zweimal geſchiehet, iſt =

$$[n^x + x(m-n)n^{x-1} + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}.(m-n)^2 n^{x-2} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}.(m-n)^{x-2} n^2] : m^x;$$

die entgegengeſetzte hievon, daſs ſie höchſtens einmal geſchiehet, iſt =

$$\frac{(m-n)^x + x.(m-n)^{x-1}n}{m^x}.$$

Die Wahrſcheinlichkeit, daſs eine Begebenheit in x Verſuchen wenigſtens dreimal geſchiehet, iſt =

$$[n^x + x.(m-n)n^{x-1} + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}(m-n)^2 n^{x-2} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}.n^3(m-n)^{x-3}] : m^x;$$

die entgegengeſetzte, daſs ſie in x Verſuchen höchſtens zweimal geſchiehet, =

$$[(m-n)^x + x(m-n)^{x-1}n + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}.(m-n)^{x-2}n^2] : m^x.$$

Die Wahrſcheinlichkeit, daſs eine Begebenheit in x Verſuchen wenigſtens viermal geſchiehet, iſt =

$$[n^x + x.(m-n)n^{x-1} + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}(m-n)^2 n^{x-2} + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}.n^4(m-n)^{x-4}] : m^x;$$

daſs dieſelbe in x Verſuchen höchſtens dreimal geſchiehet, =

$$[(m-n)^x + x(m-n)^{x-1}n + \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}(m-n)^{x-2}n^2 +$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot (m-n)^{x-3} n^3] : m^x.$$

Und so weiter.

Ueberhaupt ist die Wahrscheinlichkeit desjenigen, der in x Versuchen etwas wenigstens r mal zu leisten unternimmt =

$$[n^x + x n^{x-1}(m-n) + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} n^{x-2}(m-n)^2 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{x(x-1) \ldots (x-r+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots r} (m-n)^{x-r} n^r] : m^x;$$

die Wahrscheinlichkeit des Gegenspielers, diese Begebenheit in x Versuchen höchstens $(r-1)$ mal zu leisten, =

$$[(m-n)^x + x(m-n)^{x-1} n + \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}(m-n)^{x-2} n^2 + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{x(x-1) \ldots (x-r+2)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots (r-1)} \cdot (m-n)^{x-r+1} n^{r-1}] : m^x.$$

Man sehe beigefügte *Tafel I*, welche die Wahrscheinlichkeit desjenigen enthält, der einem andern in einigen Versuchen etwas ein- oder mehrmal zu leisten vorschreibt; und *Tafel II*, welche die Wahrscheinlichkeit desjenigen angiebt, der es zu leisten annimmt.

Die weitere Ausführung dieser beiden Tafeln fällt in die Augen, nämlich die wagrechten Kolumnen enthalten nach der Ordnung die Glieder aller Potenzen des Binomiums $[(m-n)+n]:m$, und zwar die zweite wagrechte Kolumne die Quadrate, die dritte die Würfel, die vierte die Biquadrate, u. s. f.; so daſs in der *ersten* Tafel die erste senkrechte Kolumne blos die ersten Glieder, die zweite senkrechte blos die zwei ersten, die dritte die drei ersten, die vierte die vier ersten Glieder dieser Potenzen, u. s. f. in sich begreift; und die einzelnen Glieder der *zweiten* Tafel nach der Ordnung allemal die Ergänzungen jener der ersten Tafel zur vollständigen Potenz von $[(m-n)+n]: m$ sind.

$((n$

$((m$

$((m$

$((m-n,^x+$

$+\frac{x(x-1}{1.}$

F E

Verf viermal

1

2

3

n^4

$5(m-n)^3 n^2)^5$

$6-n)^3 n^3 + 15(m(m-n)^2 n^4) : m^6$

etc.

$\frac{x-1)}{.2}.(m-n + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1.2.3.4}(m-n)^{x-4}n^4) : m^x$

$\frac{x-1)(x-}{1.2}$

Beispiele. Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit mit drei Würfeln in einem Wurfe, oder welches einerlei ist, mit einem oder drei verschiedenen Würfeln in drei Würfen, wenigstens zwei Asse zu werfen?

Die hieher gehörige Formel aus der *zweiten* Tafel ist $[n^3 + 3(m-n)n^2] : m^3$. In dieser setze man $n = 1$, $m = 6$; so erhält man die gesuchte Wahrscheinlichkeit $=$ $[1^3 + 3(6-1) \cdot 1^2] : 6^3 = \frac{2}{27}$.

Die Formel für die entgegengesetzte Wahrscheinlichkeit ist aus der *ersten* Tafel $[(m-n)^3 + 3(m-n)^2 n] : m^3$ $= (5^3 + 3 \cdot 5^2 \cdot 1) : 6^3 = \frac{25}{27}$.

Wie grofs ist die Wahrscheinlichkeit, mit drei Würfeln in einem Wurfe, oder, mit einem Würfel in drei Würfen, wenigstens ein As zu werfen?

Hier ist (Tafel II.) $[n^3 + 3(m-n)n^2 + 3(m-n)^2 n] : m^3$ $= [1^3 + 3 \cdot 5 \cdot 1^2 + 3 \cdot 5^2 \cdot 1] : 6^3 = \frac{91}{216}$. Die entgegengesetzte (Tafel I.) $= (m-n)^3 : m^3 = 5^3 : 6^3 = \frac{125}{216}$.

Die Wahrscheinlichkeit mit x Würfeln in einem Wurfe wenigstens zwei Asse zu werfen, ist (Tafel II.) $=$

$$\frac{[(m-n)+n]^x - x \cdot (m-n)^{x-1} n - (m-n)^x}{m^x} =$$

$$1 - \frac{x(m-n)^{x-1} n + (m-n)^x}{m^x} = 1 - \frac{x \cdot 5^{x-1} \cdot 1 + 5^x}{6^x}.$$

Die entgegengesetzte (Tafel I.) $=$

$$\frac{(m-n)^x + x \cdot (m-n)^{x-1} \cdot n}{m^x} = \frac{5^x + x \cdot 5^{x-1} \cdot 1}{6^x}.$$

§. 49.*

Will man wissen, mit wie viel Würfeln in einem Wurfe, das ist, in wie viel Würfen mit einem Würfel, beide Spieler gleiche Wahrscheinlichkeiten haben werden; oder, mit wie viel Würfeln in einem Wurfe jemand mit Vortheil unternehmen könne, wenigstens 1, 2, 3 etc. überhaupt r Augen zu werfen; so setze man

$$\frac{n^x + x(m-n)n^{x-1} + \ldots + {}^xR.(m-n)^{x-r}.n^r}{m^x} = \frac{1}{2} \text{ oder (§. 47.)}$$

$$\frac{m^x - (m-n)^x - x(m-n)^{x-1}n - \ldots - {}^x[R-1].(m-n)^{x-r+1}n^{r-1}}{m^x} = \frac{1}{2}$$

und suche aus einer von diesen beiden Gleichungen den Werth von x zu bestimmen.

Zum Beispiel. Mit wie viel Würfeln in einem Wurfe kann es jemand mit Vortheil unternehmen, wenigstens zwei Asse zu werfen?

Hier ist (Tafel I.) $1 - \frac{(m-n)^x + x(m-n)^{x-1}n}{m^x} = \frac{1}{2}$.

Nun ist im gegebenen Beispiele $m = 6$, $n = 1$, $m - n = 5$, also $1 - \frac{5^x + x.5^{x-1}}{6^x} = \frac{1}{2}$. Setzt man nunmehro in dieser letzten Formel nach und nach anstatt x die ganzen Zahlen: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, u. s. f. so bekömmt man

Für $x = 2$, $\frac{1}{36} < \frac{1}{2}$;

Für $x = 3$, $\frac{2}{27} < \frac{1}{2}$;

Für $x = 4$, $\frac{19}{144} < \frac{1}{2}$;

Für

Für $x = 5$, $\frac{763}{3888} < \frac{1}{2}$;

Für $x = 6$, $\frac{12281}{46656} < \frac{1}{2}$;

Für $x = 7$, $\frac{7703}{23328} < \frac{1}{2}$;

Für $x = 8$, $\frac{663991}{1579616} < \frac{1}{2}$;

Für $x = 9$, $\frac{2304473}{5038848} < \frac{1}{2}$;

Für $x = 10$, $\frac{10389767}{20155392} > \frac{1}{2}$.

Alſo erhellet, daſs man bei gleichen Miſen mit neun Würfeln wenigſtens zwei Aſſe zu werfen mit einigem Nachtheil unternimmt; mit zehn Würfeln aber eben dieſes zu leiſten, ein kleiner Vortheil vorhanden iſt; imgleichen, daſs eine ſolche Wette nie rechtmäſsig werden kann.

Für den Gegenſpieler ſetzt man

$$\frac{(m-n)^x + x(m-n)^{x-1}n + \ldots + {}^x[R-1]\,.\,(m-n)^{x-r+1}n^{r-1}}{m^x} = \frac{1}{2},$$

und ſucht in dieſer Gleichung x zu beſtimmen.

Zum Beiſpiel. Für das vorige Beiſpiel verwandelt ſie ſich in

$$\frac{(m-n)^x + x(m-n)^{x-1}n}{m^x} = \frac{1}{2} = \frac{5^x + x\,.\,5^{x-1}}{6^x},$$

und giebt

Für $x = 2$, $\frac{35}{36} > \frac{1}{2}$;

Für $x = 3$, $\frac{25}{27} > \frac{1}{2}$;

Für $x = 4$, $\frac{125}{144} > \frac{1}{2}$;

Für $x = 5$, $\frac{3125}{3888} > \frac{1}{2}$;

Für $x = 6$, $\frac{34375}{46656} > \frac{1}{2}$;

Für $x = 7$, $\frac{15625}{23328} > \frac{1}{2}$;

Für $x = 8$, $\frac{915625}{1579616} > \frac{1}{2}$;

Für $x = 9$, $\frac{2734375}{5038848} > \frac{1}{2}$;

Für $x = 10$, $\frac{9765625}{20155392} < \frac{1}{2}$, wie gehörig.

Oder, da aus $\frac{(m-n)^x + x(m-n)^{x-1}n}{m^x} = \frac{1}{2}$ folgt: $2(m+(x-1)n).(m-n)^{x-1} = m^x$; so erhellet, dafs, wenn man m auf diejenige Würde erhebt, welche mit dem Produkte der Gröfse $(m-n)^{x-1}$ in die doppelte Summe von $m+(x-1)n$ übereinkommt; der Exponent von m die gesuchte rechtmäfsige Zahl der Versuche (oder Würfel), bei gleichen Misen, für den Fall anzeigen wird, wenn etwas wenigstens zweimal geleistet werden soll. Nun ist im gegebenen Beispiel $m=6$, $n=1$, $m-n=5$,

folglich $6^9 = 10077696$ | $5^8 = 390625$
$6^{10} = 60466176$ | $5^9 = 1953125$

$2(6+8).5^8 = 28.390625 = 10937500 > 10077696 = 6^9$,

$2(6+9).5^9 = 30.1953125 = 58593750 < 60466176 = 6^{10}$.

Da alſo für $x=9$, $2.5468750 > 10077696$ oder

$$\frac{5468750}{10077696} = \frac{2734375}{5038848} > \frac{1}{2}$$

hingegen für $x=10$, $2.29296875 < 60466176$ oder

$$\frac{29296875}{60466176} = \frac{9765625}{20155392} < \frac{1}{2};$$

ſo folget, wie zuvor, daſs neun Würfel noch nicht hinreichen, aber zehn Würfel mit Vortheil gewählt werden können, auf einen Wurf wenigſtens zwei Aſſe zu werfen.

Will man die Wahrſcheinlichkeit wiſſen, in wie viel Würfen mit zwei Würfeln man rechtmäſsig, oder ſo rechtmäſsig als möglich, bei gleichen Miſen ſieben Augen wenigſtens zweimal zu werfen, mit einem andern wetten kann; ſo wird man, nachdem man nach der eben angezeigten Methode verfahren, eben dieſelben Reſultate erhalten. Es iſt nämlich hier $\frac{n}{m} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$, und auch alles übrige wie vorhin.

§. 50.

Wenn überhaupt bekannt iſt die Wahrſcheinlichkeit $\frac{n}{m}$ einer Begebenheit in einem Verſuche, und die Wahrſcheinlichkeit P, daſs eben dieſe Begebenheit in einer unbekannten Anzahl x von Verſuchen $\left\{\begin{array}{l}\text{juſt } r \text{ mal}\\ \text{höchſtens } r-1 \text{ mal}\\ \text{wenigſtens } r \text{ mal}\end{array}\right\}$ ſich ereignen wird: ſo ergiebt ſich die Zahl x der Verſuche, wodurch dieſe Begebenheit die Wahrſcheinlichkeit P erhält, und in welchen ſie ſich $\left\{\begin{array}{l}\text{juſt } r \text{ mal}\\ \text{höchſtens } r-1 \text{ mal}\\ \text{wenigſtens } r \text{ mal}\end{array}\right\}$ ereignen wird: wenn man in der allgemeinen Formel,

die im Lehrsatz {§. 32. §. 41. §. 45.} bewiesen worden; anstatt x nach und nach die Zahlen r, $r+1$, $r+2$, $r+3$, u. s. f. setzt, so lange bis man einen Bruch erhält, der dem gegebenen P gleich ist, oder ihm am nächsten kommen wird.

§. 51.

Sind $\left\{\begin{matrix} \frac{n}{m} \\ r \end{matrix}\right\}$, P und x bekannt, hingegen $\left\{\begin{matrix} r \\ \frac{n}{m} \end{matrix}\right\}$ unbekannt; so läſst sich auf eine ähnliche Art durch allmählige Substitutionen, der Werth der unbekannten Gröſse finden. Wenn demnach von diesen vier Gröſsen, nämlich: 1) der Wahrscheinlichkeit, daſs eine Begebenheit in einem Versuche sich ereignen wird $(\frac{n}{m})$; 2) der Wahrscheinlichkeit, daſs diese Begebenheit just, oder wenigstens, oder höchstens eine gewisse Anzahl von malen in einer gegebenen Menge von Versuchen sich ereignen wird (P); 3) der Anzahl von malen, daſs die Begebenheit sich wahrscheinlich ereignen soll (r); 4) der Anzahl der Versuche (x); je drei gegeben sind, so wird sich jederzeit die vierte Gröſse daraus finden lassen.

§. 52.*

Aufgabe. *Die Wahrscheinlichkeit zu finden, mit zwei gemeinen Spielwürfeln in acht Würfen, just viermal sechs Augen, und just zweimal einen Pasch zu werfen.*

Vorbereitung. Hier ist die Anzahl aller Fälle in einem Versuche $=36$;

Die Wahrscheinlichkeit für die erste Begebenheit in einem Versuche $= \frac{5}{36}$;

Die Wahrſcheinlichkeit für die zweite Begebenheit in einem Verſuche $= \frac{6}{36}$ oder $\frac{1}{6}$;

Ferner giebt es *einen* Fall, welcher die beiden beſtimmten Begebenheiten zugleich giebt, wenn nämlich ſechs auf die Art geworfen wird, daſs beim erſten Würfel drei Augen, und beim zweiten Würfel auch drei Augen oben ſtehen, welches zugleich ein Paſch iſt.

Folglich iſt $5-1$ oder 4 die Anzahl der Fälle, welche die erſte Begebenheit ohne die zweite; und $6-1$ oder 5 die Anzahl der Fälle, welche die zweite Begebenheit ohne die erſte geben; endlich $36-(5+6-1) = 36-5-6+1$ oder 26 die Anzahl der Fälle, welche keine von den beiden Begebenheiten geben.

Auflösung. I. Es kann ſich zutragen, daſs ſich nicht derjenige Fall ereignet, welcher die beiden Begebenheiten zugleich giebt, und dann iſt die Anzahl der gleich möglichen Arten juſt viermal die erſte Begebenheit, und zweimal die zweite Begebenheit in acht Verſuchen zu erhalten, =

$$\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} \cdot 26^2 \cdot \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} \cdot 4^4 \cdot 5^2 = 1817088000;$$

man ſetzt nämlich in dem Zähler des Bruchs der Wahrſcheinlichkeit (§. 30.) $x=8$; $r=4$; $t=2$; t', t'', etc. $=0$; $m-n-q-\ldots=26$; $n=4$; $q=5$; q', q'', etc. $=0$.

II. Es kann ſich zutragen, daſs ſich derjenige Fall, welcher die beiden Begebenheiten zugleich giebt, in acht Verſuchen einmal ereignet; welches entweder im 1ſten, oder 2ten, 3ten, 4ten, 5ten, 6ſten, 7ten oder 8ten Verſuche geſchehen kann. Nun iſt die Anzahl der möglichen Arten juſt 4–1 oder dreimal die erſte ohne zugleich die zweite, und $2-1$ das iſt einmal die zweite Begebenheit ohne zugleich die erſte, in 7 Verſuchen zu er-

halten, $= \frac{7.6.5}{1.2.3}.26^3.\frac{4}{1}.4^3.5^1$ (§. 30.); und zu einer jeden von diesen Arten kann sich derjenige Fall, welcher die beiden Begebenheiten zugleich giebt, auf acht Arten ereignen. Wenn sich also derjenige Fall, der die beiden Begebenheiten zugleich giebt, in acht Versuchen einmal, oder in einem Versuche, es sei welcher es wolle, ereignet; so ist die Anzahl der Arten viermal die erste, und zweimal die zweite Begebenheit in acht Versuchen zu erhalten, =

$$\frac{7.6.5}{1.2.3}.26^3.\frac{4}{1}.4^3.5^1.8=6299238400.$$

III. Es kann sich endlich zutragen, dass sich derjenige Fall, welcher die beiden Begebenheiten zugleich giebt, in acht Versuchen zweimal, oder in zwei Versuchen ereignet, welches

$$\left\{\begin{array}{l}\text{entweder im 1, u. 2, oder 1, u. 3, ... oder 1, u. 8} \\ \qquad\qquad\qquad\text{— 2, – 3, – — 2, – 8} \\ \text{etc.}\end{array}\right\}\text{ten}$$

Versuche geschehen kann. Nun ist die Anzahl der Arten, 4−2 das ist zweimal die erste Begebenheit ohne zugleich die zweite, und 2−2, das ist 0 mal die 2te Begebenheit in sechs Versuchen zu erhalten (§. 30.) =

$$\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}.26^4.4^2.5^0;$$

und zu einer jeden dieser Arten können sich die zwei Fälle, welche die beiden Begebenheiten zugleich geben, auf $\frac{8.7}{1.2}$ Arten ereignen. Wenn sich also derjenige Fall, welcher die beiden Begebenheiten zugleich giebt, in acht Versuchen zweimal ereignet, es sei in welchem Paare es wolle; so ist die Anzahl der Arten, viermal die erste Begebenheit, und zweimal die zweite Begebenheit in

acht Verſuchen zu erhalten, =

$$\frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}.26^4.4^2.\frac{8.7}{1.2}=3070878720.$$

IV. Demnach iſt der Zähler der geſuchten Wahrſcheinlichkeit (aus I, II, III.) = 1817088000 + 6299238400 + 3070878720 = 11187205120.

V. Der Nenner dieſer Wahrſcheinlichkeit iſt (§. 2.) $= 36^8 = 2821109907456$.

VI. Folglich iſt die geſuchte Wahrſcheinlichkeit =

$$\frac{11187205120}{2821109907456}=\frac{10925005}{2754990144}.$$ *W. Z. F.*

§. 53.

Iſt überhaupt 1) die Anzahl aller Fälle, die von einer gegebenen Handlung, Bewegung, oder einem gegebenen Zuſtande abhängen, $= m$; 2) Sind $\frac{n}{m}$ und $\frac{q}{m}$, die Wahrſcheinlichkeiten zweier Begebenheiten, die von dieſer Handlung u. ſ. f. abhängen, in einem Verſuche; 3) Giebt es *einen* Fall, welcher die beiden Begebenheiten zugleich giebt; 4) Iſt $\left[\begin{matrix} y \text{ oder } n-1 \\ z \text{ oder } q-1 \end{matrix}\right]$ die Anzahl der Fälle, welche die $\left[\begin{matrix} \text{1ſte} \\ \text{2te} \end{matrix}\right]$ Begebenheit allein, ohne die $\left[\begin{matrix} \text{2te} \\ \text{1ſte} \end{matrix}\right]$ geben; 5) Iſt ferner u oder $m-(n+q-1) = m-n-q+1$ die Anzahl der Fälle, welche keine von den beiden Begebenheiten geben: ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs in x Verſuchen die erſte Begebenheit juſt r mal, und die zweite juſt t mal ſich ereignen wird, =

$$\left(\frac{x \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (r+t+1)}{1.2\,.\,.\,.\,.\,(x-r-t)}.u^{x-r-t} \times \right.$$

$$\frac{(r+t)\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(r+1)}{1.2\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,t}.y^r.z^t +$$

$$\frac{(x-1)\ldots\ldots(r+t-1)}{1.2\ldots\ldots(x-r-t+1)} . u^{x-r-t+1} \times$$

$$\frac{(r+t-2)\ldots\ldots r}{1.2\ldots\ldots(t-1)} . y^{r-1} . z^{t-1} . x +$$

$$\frac{(x-2)\ldots\ldots(r+t-3)}{1.2\ldots\ldots(x-r-t+2)} . u^{x-r-t+2} \times$$

$$\frac{(r+t-4)\ldots(r-1)}{1.2\ldots(t-2)} . y^{r-2} . z^{t-2} . \frac{x(x-1)}{1.2} + \ldots +$$

$$\frac{(x-t+1)\ldots\ldots(r-t+3)}{1.2\ldots\ldots(x-r-1)} . u^{x-r-1} \times$$

$$\frac{r-t+2}{1} . y^{r-t+1} . z^{1} . \frac{x(x-1)\ldots(x-t+2)}{1.2\ldots(t-1)} +$$

$$\frac{(x-t)\ldots\ldots(r-t+1)}{1.2\ldots\ldots(x-r)} . u^{x-r} \times$$

$$1 . y^{r-t} . z^{0} . \frac{x(x-1)\ldots(x-t+1)}{1.2\ldots\ldots t}\Big) . \frac{1}{m^{x}}.$$

§. 54.

Aufgabe. *Ist 1) m die Anzahl aller Fälle, die von einer gegebenen Handlung, Bewegung, oder von einem gegebenen Zustande abhängen; 2) Sind* $\frac{n}{m}$ *und* $\frac{q}{m}$ *die Wahrscheinlichkeiten in einem Versuche, zweier Begebenheiten, die von eben dieser Handlung, Bewegung, oder eben diesem Zustande abhängen; 3) Ist* φ *die Anzahl der Fälle, welche diese beiden Begebenheiten zugleich geben; 4)* $\begin{bmatrix} y = n - \varphi \\ z = q - \varphi \end{bmatrix}$ *die Anzahl der Fälle, welche die* [erste / zweite] *Begebenheit allein, ohne zugleich die* [zweite / erste] *geben; 5) und* $u = m - n - q + \varphi$ *die Anzahl der Fälle,*

welche keine von den zwei Begebenheiten geben: so findet man die Wahrscheinlichkeit, dafs in x Versuchen die erste Begebenheit just r mal und die zweite just t mal geschiehet, folgendergestalt:

Auflösung. I. Es kann sich zutragen, dafs keiner von den φ Fällen, welche die beiden Begebenheiten zugleich geben, sich ereignet. Alsdann ist die Anzahl der Arten r mal die erste Begebenheit, und t mal die zweite in x Versuchen zu erhalten (§. 30.) =

$$\frac{x \ldots (r+t+1)}{1.2.3 \ldots (x-r-t)} . u^{x-r-t} . \frac{(r+t) \ldots (r+1)}{1.2 \ldots t} . y^r . z^t \text{ oder}$$

$$\frac{x \ldots\ldots\ldots\ldots (r+1)}{1.2 \ldots t . 1.2 \ldots (x-r-t)} . y^r . z^t . u^{x-r-t} .$$

II. Es kann sich zutragen, dafs einer von den φ Fällen, welche die beiden Begebenheiten zugleich geben, in x Versuchen einmal, oder in einem Versuche, es sei in welchem es wolle, sich ereignet; und in diesem Falle kann ein jeder von diesen φ Fällen in x verschiedenen Versuchen sich ereignen, welches das Produkt $x . \varphi$ giebt. Da nun die Anzahl der Arten, $(r-1)$ mal die erste Begebenheit, und $(t-1)$ mal die zweite, in $(x-1)$ Versuchen zu erhalten (§. 30.) =

$$\frac{(x-1) \ldots (r+t-1)}{1.2 \ldots (x-r-t+1)} . u^{x-r-t+1} . \frac{(r+t-2) \ldots r}{1.2 \ldots (t-1)} . y^{r-1} . z^{t-1} \text{ oder}$$

$$\frac{(x-1) \ldots\ldots\ldots\ldots r}{1.2 \ldots (t-1) . 1.2 \ldots (x-r-t+1)} . y^{r-1} . z^{t-1} . u^{x-r-t+1} ;$$

und zu einer jeden von diesen Arten ein jeder von den φ Fällen, welche die zwei Begebenheiten zugleich geben, in x verschiedenen Versuchen sich ereignen kann: so ist die Anzahl der gleich möglichen Arten, wenn sich ein einziger von den φ Fällen, welche die zwei Begebenheiten zugleich geben, in einem Versuche ereignet, r mal die erste Begebenheit, und t mal die zweite, in

x Versuchen zu erhalten, =

$$\frac{(x-1)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;r}{1.2\ldots(t-1).1.2\ldots(x-r-t+1)}\,.\,y^{r-1}\,.\,z^{t-1}\,.\,u^{x-r-t+1}\,.\,x\,.\,\varphi.$$

III. Es kann sich zutragen, daſs einer von den φ Fällen, welche die beiden Begebenheiten zugleich geben, in x Versuchen zweimal, oder in zwei Versuchen sich ereignet; oder, daſs zwei von diesen φ Fällen in zwei Versuchen zum Vorschein kommen. Da nun die Anzahl aller gleich möglichen Arten, einen oder zwei von den φ Fällen in zwei Versuchen hervorzubringen, $=\varphi^2$ ist (§. 2.), und ein jeder von diesen φ^2 Fällen,

$$\left\{\begin{matrix}\text{entweder im } 1,\ \text{u. } 2,\ \text{oder } 1,\ \text{u. } 3, \ldots.\ 1,\ \text{u. } x \\ -\ 2,\ -\ 3, \ldots.\ 2,\ -\ x \\ \text{etc.}\end{matrix}\right\}\text{ten}$$

Versuche sich ereignen kann, welches das Produkt $\frac{x.(x-1)}{1\,.\,2}\,\varphi^2$ giebt; ferner die Anzahl der Arten, $(r-2)$ mal die erste Begebenheit, und $(t-2)$ mal die zweite, in $(x-2)$ Versuchen zu erhalten, =

$$\frac{(x-2)\ldots.(r+t-3)}{1.2\ldots.(x-r-t+2)}\,.\,u^{x-r-t+2}\,.\,\frac{(r+t-4)\ldots(r-1)}{1.\,2\ldots.\,(t-2)}\,.\,y^{r-2}\,.\,z^{t-2}$$

$$\text{oder }\frac{(x-2)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(r-1)}{1.2\ldots(t-2).1.2\ldots(x-r-t+2)}\,.\,y^{r-2}\,.\,z^{t-2}\,.\,u^{x-r-t+2}$$

ist, endlich zu einer jeden dieser Arten, einer oder zwei von den φ Fällen, welche die beiden Begebenheiten zugleich geben, in zwei Versuchen auf $\frac{x\,(x-1)}{1\,.\,2}\,.\,\varphi^2$ Arten sich ereignen können: so ist die Anzahl der Arten, wenn sich einer oder zwei von den φ Fällen, welche die beiden Begebenheiten zugleich geben, in zwei Versuchen ereignen, r mal die erste Begebenheit, und t mal die zweite, in x Versuchen zu erhalten =

$$\frac{(x-2)\;.\;.\;.\;.\;.\;(r-1)}{1.2\ldots(t-2).1.2\ldots(x-r-t+2)}.y^{r-2}.z^{t-2}.u^{x-r-t+2}.\frac{x(x-1)}{1\;.\;2}\varphi^2.$$

IV. Es kann ſich zutragen, daſs einer von den φ Fällen in x Verſuchen dreimal, oder zwei, oder drei von den φ Fällen in drei Verſuchen ſich ereignen; wodurch man das Produkt $\frac{x(x-1)(x-2)}{1\;.\;2\;.\;3}\varphi^3$ bekömmt. Nun iſt die Anzahl der Arten $(r-3)$ mal die erſte Begebenheit, und $(t-3)$ mal die zweite in $(x-3)$ Verſuchen zu erhalten, =

$$\frac{(x-3)\ldots\ldots(r-2)}{1.2\ldots(t-3).1.2\ldots(x-r-t+3)}.y^{r-3}.z^{t-3}.u^{x-r-t+3}.$$

Folglich iſt die Anzahl der Arten in dem Falle, wenn ſich einer, oder zwei, oder drei von den φ Fällen, welche die beiden Begebenheiten zugleich geben, in drei Verſuchen ereignen, r mal die erſte Begebenheit, und t mal die zweite, in x Verſuchen zu erhalten, =

$$\frac{(x-3)\;.\;.\;.\;.\;.\;(r-2)}{1\;.\;2\;.\;.\;.\;.\;(t-3).1\;.\;2\ldots(x-r-t+3)}.y^{r-3}.z^{t-3}.u^{x-r-t+3}\times$$
$$\frac{x(x-1)(x-2)}{1\;.\;2\;.\;3}\varphi^3.$$

V. Es kann ſich zutragen, daſs einer oder zwei oder drei oder vier von den φ Fällen in vier Verſuchen ſich ereignen; und in dieſem Falle iſt die Anzahl der Arten das verlangte Reſultat zu erhalten, =

$$\frac{(x-4)\;.\;.\;.\;.\;(r-3)}{1.2\ldots(t-4)\;.\;1\;.\;2\ldots(x-r-t+4)}.y^{r-4}.z^{t-4}.u^{x-r-t+4}\times$$
$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4}\varphi^4.$$ Und ſo weiter.

VI. Es kann ſich endlich zutragen, daſs 1, oder 2, oder 3, oder 4, oder 5, ... oder höchſtens t

(weil $r > t$ iſt) von den φ Fällen, welche die zwei Begebenheiten zugleich geben, in t Verſuchen ſich ereignen, daſs alſo die erſte Begebenheit allein ſich in $(r-t)$ Verſuchen ereignet, und keine von den zwei Begebenheiten in den übrigen $x-(t+(r-t))=x-r$ Verſuchen zum Vorſchein kommt. Nun iſt die Anzahl der Arten $(r-t)$ mal die erſte Begebenheit, und $(t-t)$ das iſt o mal die zweite, in $(x-t)$ Verſuchen zu erhalten, =

$$\frac{(x-t)\ldots(r-t+1)}{1.2\ldots(x-r)}.u^{x-r}.y^{r-t}.z^{0};$$

folglich iſt die Anzahl der Arten in dem Falle, wenn ſich 1, 2, 3, ... oder t von den φ Fällen, welche die beiden Begebenheiten zugleich geben, in t Verſuchen ereignen, r mal die erſte Begebenheit, und t mal die zweite, in x Verſuchen zu erhalten, =

$$\frac{(x-t)\ldots(r-t+1)}{1.2\ldots(x-r)}.y^{r-t}.z^{0}.u^{x-r}.\frac{x\ldots(x-t+1)}{1.2\ldots t}.\varphi^{t}.$$

VII. Der Zähler der geſuchten Wahrſcheinlichkeit iſt alſo die Summe der in Num. I. bis VI. gefundenen Arten das verlangte Reſultat zu erhalten. Der Nenner iſt $= m^{x}$ (§. 2.). Folglich iſt die geſuchte Wahrſcheinlichkeit =

$$\Big(\frac{x(x-1)\ldots(r+1)}{1.2\ldots t.1.2\ldots(x-r-t)}.y^{r}.z^{t}.u^{x-r-t} +$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)\ldots r}{1.2\ldots(t-1).1.2\ldots(x-r-t+1)}.y^{r-1}.z^{t-1}.u^{x-r-t+1}.\frac{1}{1}\varphi +$$

$$\frac{x(x-1)\ldots(r-1)}{1.2\ldots(t-2).1.2\ldots(x-r-t+2)}.y^{r-2}.z^{t-2}.u^{x-r-t+2}.\frac{1}{1.2}\varphi^{2} +$$

$$\frac{x.(x-1)\ldots(r-2)}{1.2\ldots(t-3)1.2\ldots(x-r-t+3)}.y^{r-3}.z^{t-3}.u^{x-r-t+3}.\frac{1}{1.2.3}\varphi^{3} +$$

$$\frac{x(x-1)\ldots(r-3)}{1.2\ldots(t-4).1.2\ldots(x-r-t+4)}.y^{r-4}.z^{t-4}.u^{x-r-t+4}.\frac{1}{1.2.3.4}\varphi^{4} +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$\frac{x(x-1)\ldots(r-t+2)}{1.1.2\ldots(x-r-1)}.y^{r-t+1}.z^{1}.u^{x-r-1}.\frac{1}{1.2\ldots(t-1)}.\varphi^{t-1} +$$

$$\left.\frac{x.(x-1)\ldots(r-t+1)}{1.2\ldots(x-r)}.y^{r-t}.z^{0}.u^{x-r}.\frac{1}{1.2.3\ldots t}.\varphi^{t}\right).\frac{1}{m^{x}}.$$

W. Z. F.

§. 55.

Beispiel. Das (§. 52.) gegebene Exempel läſst ſich aus dieſer allgemeinen Formel auflöſen, wenn man darinnen $x=8$, $r=4$, $t=2$, $\varphi=1$, $m=36$, $n=5$, $q=6$, und demnach $y=n-\varphi=4$, $z=q-\varphi=5$, $u=m-n-q+\varphi=26$, ſetzt. Man bekömmt alſo die geſuchte Wahrſcheinlichkeit:

$$\left(\frac{8.7.6.5}{1.2.1.2}.4^{4}.5^{2}.26^{2} +\right.$$

$$\frac{8.7.6.5.4}{1.1.2.3}.4^{3}.5^{1}.26^{3}.\frac{1}{1}.1 +$$

$$\left.\frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4}.4^{2}.5^{0}.26^{4}.\frac{1}{1.2}.1^{2}\right)\frac{1}{36^{8}},$$ wie zuvor a. a. O.

§. 56.*

Aufgabe. *Die Wahrſcheinlichkeit zu finden, daſs eine jede von den zwei Begebenheiten (§. 54.) wenigſtens einmal in x Verſuchen zum Vorſchein kommt.*

Auflösung. Man ſuche *erſtens* die Anzahl der Fälle, welche keine von den zwei Begebenheiten in x Verſuchen geben, $= u^{x} = (m-n-q+\varphi)^{x}$; *zweitens* die Anzahl der Fälle, welche in x Verſuchen die erſte Begebenheit juſt r mal und die zweite gar nicht geben (§. 54. I.) =

$$(\odot)\ \frac{x\ldots\ldots(r+1)}{1.2\ldots(x-r)}.y^{r}.u^{x-r};$$

drittens die Anzahl der Fälle, die in x Versuchen die zweite Begebenheit just t mal und die erste gar nicht geben (ebendaselbst) =

$$\frac{x \ldots\ldots 1}{1.2\ldots t.1.2\ldots(x-t)}.z^t.u^{x-t} =$$

$$(☽)\ \frac{x \ldots\ldots (t+1)}{1.2\ldots(x-t)}.z^t.u^{x-t}.$$

Nun setze man *viertens* in (☉) anstatt r nach und nach alle ganze Zahlen von 1, 2, 3, ... bis x, und addire die gefundenen Produkte; so ist die Summe die Anzahl der Fälle, welche in x Versuchen die erste Begebenheit wenigstens einmal, und die zweite gar nicht geben, =

$$x.y.u^{x-1} + \frac{x(x-1)}{1.2}.y^2.u^{x-2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} \times$$

$$y^3.u^{x-3} + \ldots + y^x = (u+y)^x - u^x = (m-q)^x - (m-n-q+\varphi)^x.$$

Fünftens setze man in (☽) anstatt t alle ganze Zahlen von 1 bis x, so giebt die Summe der herausgekommenen Produkte die Anzahl der Fälle, welche in x Versuchen die zweite Begebenheit wenigstens einmal, und die erste gar nicht geben, =

$$x.zu^{x-1} + \frac{x(x-1)}{1.2}z^2u^{x-2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}.z^3.u^{x-3} + \ldots$$

$$\ldots + z^x = (u+z)^x - u^x = (m-n)^x - (m-n-q+\varphi)^x.$$

Demnach zeiget $(m-n-q+\varphi)^x$

$$+ (m-q)^x - (m-n-q+\varphi)^x$$

$$+ (m-n)^x - (m-n-q+\varphi)^x$$

$= (m-n)^x + (m-q)^x - (m-n-q+\varphi)^x$ die Summe der Fälle, die in x Versuchen entweder keine von den zwei Begebenheiten, oder wenigstens die erste Begebenheit einmal ohne die zweite, oder wenigstens einmal die zweite Begebenheit ohne die erste, geben.

Folglich ist die Anzahl der Fälle, welche in x Versuchen die zwei Begebenheiten, jede wenigstens einmal geben $= m^x - (m-n)^x - (m-q)^x + (m-n-q+\varphi)^x$. Und demnach die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{m^x - (m-n)^x - (m-q)^x + (m-n-q+\varphi)^x}{m^x}.$$

§. 57.

Beispiele. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln in vier Würfen wenigstens einmal sechs Augen und einen Pasch zu werfen?

Hier ist (§. 56.) $x=4$; $m=36$; $n=5$; $q=6$; $\varphi=1$; also $m-n=31$; $m-q=30$; $m-n-q+\varphi=26$. Und demnach die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{36^4 - 31^4 - 30^4 + 26^4}{36^4} =$$

$$\frac{+1679616-923521-810000+456976}{1679616} = \frac{403071}{1679616} = \frac{134357}{559872}.$$

* Man sucht die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfeln in sechs Würfen wenigstens einmal sieben und acht Augen zu werfen.

Es ist hier $m=36$; $x=6$; $n=6$, $q=5$, $\varphi=0$, (Kap. I. §. 4.); also $(m-n)=30$; $(m-q)=31$; $(m-n-q+\varphi)=25$;

$$(m-n)^x = 30^6 = 729000000$$
$$(m-q)^x = 31^6 = 887503681$$
$$30^6 + 31^6 = 1616503681$$

$$m^x = 36^6 = 2176782336$$
$$(m-n-q+\varphi)^x = 25^6 = 244140625$$
$$36^6 + 25^6 = 2420922961$$
$$\text{subtr. } 1616503681$$
$$+ \ 804419280$$

Demnach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{804419280}{2176782336} = \frac{50276205}{136048897}.$$

§. 58.*

Anmerkung. Die zu dem zweiten Exempel (§. 57.) gehörige allgemeine Formel:

$$\frac{m^x - (m-n)^x - (m-q)^x + (m-n-q)^x}{m^x}$$

wo der Fall vorkommt, dass $\phi = 0$ ist, das heisst, dass kein Fall die beiden Begebenheiten zugleich giebt, lässt sich auch aus §. 30. durch folgende Rechnung finden:

Man setze am a. O. *für zwei Begebenheiten* (S. §. 54. I.) anstatt r nach und nach alle ganze Zahlen von 1 bis $x-t$; so bekömmt man die Wahrscheinlichkeit wenigstens einmal die erste Begebenheit, und just t mal die zweite, in x Versuchen zu erhalten =

$$\left(\frac{x \ldots\ldots 2}{1.2\ldots t.1.2\ldots(x-t-1)}.(m-n-q)^{x-t-1}.n.q^t + \right.$$

$$\frac{x \ldots\ldots 3}{1.2\ldots t.1.2\ldots(x-t-2)}.(m-n-q)^{x-t-2}.n^2.q^t +$$

$$\frac{x \ldots\ldots 4}{1.2\ldots t.1.2\ldots(x-t-3)}.(m-n-q)^{x-t-3}.n^3.q^t +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$\left.\frac{x \ldots\ldots (x-t+1)}{1.2\ldots\ldots t}.n^{x-t}.q^t\right).\frac{1}{m^x} =$$

$$\frac{x\ldots(x-t+1)}{1.2\ldots t}q^t.\left((n+(m-n-q))^{x-t}-(m-n-q)^{x-t}\right).\frac{1}{m^x} =$$

$$\frac{x\ldots(x-t+1)}{1.2\ldots t}q^t\left((m-q)^{x-t}-(m-n-q)^{x-t}\right).\frac{1}{m^x}.$$

Nun setze man in dieser eben gefundenen Formel anstatt

t al-

t alle ganze Zahlen von 1 bis $x-1$, ſo wird die Summe der erhaltenen Produkte die geſuchte Wahrſcheinlichkeit ſein $= [x.q.((m-q)^{x-1} - (m-n-q)^{x-1}) +$

$$\frac{x(x-1)}{1.2}.q^2.((m-q)^{x-2} - (m-n-q)^{x-2}) +$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}.q^3.((m-q)^{x-3} - (m-n-q)^{x-3}) +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$x.q^{x-1}.((m-q) - (m-n-q))].\frac{1}{m^x} =$$

$$\begin{bmatrix} x.(m-q)^{x-1}q + {}^xC(m-q)^{x-2}q^2 + \ldots + x(m-q)^{x-1}q \\ -x.(m-n-q)^{x-1}q - {}^xC(m-n-q)^{x-2}q^2 - \ldots - x(m-n-q)^{x-1}q \end{bmatrix} \times$$

$$\frac{1}{m^x} = \begin{bmatrix} ((m-q)+q)^x - (m-q)^x - q^x \\ -((m-n-q)+q)^x + (m-n-q)^x + q^x \end{bmatrix} \times$$

$$\frac{1}{m^x} = \frac{m^x - (m-q)^x - (m-n)^x + (m-n-q)^x}{m^x}$$

wie gehörig (§. 56.).

§. 59.

I. Wenn man in der allgemeinen Formel (§. 54. VII.) nach und nach für r alle ganze Zahlen von
$$\begin{bmatrix} 0 \text{ bis } r \\ r \text{ bis } x-t \end{bmatrix}$$
ſetzt, und die durch ſolche Subſtitutionen erhaltenen Reſultate zuſammen addirt: ſo erhält man eine neue Formel $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$, welche die Wahrſcheinlichkeit anzeigen wird, $\begin{bmatrix} \text{höchſtens } r \text{ mal} \\ \text{wenigſtens } r \text{ mal} \end{bmatrix}$ die erſte Begebenheit, und juſt t mal die zweite Begebenheit in x Verſuchen zu erhalten.

II. Setzt man in eben dieſer allgemeinen Formel (§. 54. VII.) anſtatt t nach und nach alle ganze Zahlen

$$\left[\begin{matrix}\text{von } 0 \text{ bis } t \\ \text{von } t \text{ bis } x-r\end{matrix}\right]$$

und ſummirt alle vermittelſt dieſer Subſtitutionen gefundenen Produkte; ſo bekömmt man eine neue Formel $\left[\begin{matrix}C \\ D\end{matrix}\right]$, welche die Wahrſcheinlichkeit ſein wird, daſs die erſte Begebenheit juſt r mal, und die zweite Begebenheit $\left[\begin{matrix}\text{höchſtens } t \text{ mal} \\ \text{wenigſtens } t \text{ mal}\end{matrix}\right]$ ſich ereignet.

III. Wenn man in der allgemeinen Formel A (I.) nach und nach anſtatt t alle ganze Zahlen

$$\left[\begin{matrix}\text{von } 0 \text{ bis } t \\ \text{von } t \text{ bis } x-r\end{matrix}\right]$$

ſchreibt, und alle durch dieſe Subſtitutionen herausgekommenen Reſultate in eine Summe bringt: ſo wird man eine neue Formel $\left[\begin{matrix}E \\ F\end{matrix}\right]$ erhalten, welche die Wahrſcheinlichkeit ſein wird, höchſtens r mal die erſte Begebenheit, und $\left[\begin{matrix}\text{höchſtens } t \text{ mal} \\ \text{wenigſtens } t \text{ mal}\end{matrix}\right]$ die zweite Begebenheit, in x Verſuchen hervorzubringen.

IV. Setzt man in der allgemeinen Formel B (I.) anſtatt t alle ganze Zahlen von $\left[\begin{matrix}0 \text{ bis } t \\ t \text{ bis } x-r\end{matrix}\right]$ und ſummirt die vermittelſt dieſer Subſtitutionen herausgekommenen Produkte; ſo erhält man eine neue Formel $\left[\begin{matrix}G \\ H\end{matrix}\right]$, welche die Wahrſcheinlichkeit angiebt, daſs die erſte Begebenheit wenigſtens r mal, und die zweite $\left[\begin{matrix}\text{höchſtens} \\ \text{wenigſtens}\end{matrix}\right]$ t mal geſchiehet.

V. Wenn man in den Formeln C und D (II.) nach und nach anstatt r alle ganze Zahlen $\begin{cases} \text{von } 0 \text{ bis } r \\ \text{von } r \text{ bis } x-t \end{cases}$ setzt, und alle mittelst dieser Substitutionen herausgekommenen Produkte addirt; so bekömmt man vier neue allgemeine den E, F, G und H gleichgeltende Formeln.

VI. Setzt man in der allgemeinen Formel H, $r=1$ und $t=1$: so findet man die Wahrscheinlichkeit, die zwei Begebenheiten, eine jede wenigstens einmal, in x Versuchen hervorzubringen, wie in §. 56:

$$\frac{m^x - (m-n)^x - (m-q)^x + (m-n-q+\varphi)^x}{m^x}.$$

§. 60.

Verlangt man zu wissen, in wie viel Würfen mit zwei gemeinen Spielwürfeln man eine Wette, so rechtmäſsig als es möglich ist, bei gleichen Misen anstellen könne, sechs Augen und einen Pasch zu werfen: so setze man in dem Ausdruk:

$$\frac{36^x - 31^x - 30^x + 26^x}{36^x}$$ (§. 57) für x nach und nach alle ganze Zahlen 2, 3, 4, 5, etc. so lange bis derselbe zu einer Gröſse gelangt, die dem Bruche $\frac{1}{2}$ am nächsten kommt; diejenige Zahl nun, welche für x gesetzt, dieser Bedingung Gnüge thun wird, wird die gesuchte Menge der Würfe sein. So findet man nach angestellter Rechnung, daſs für $x=8$, obiger Ausdruk sich verwandelt in $\frac{1333128798591}{2821109907456}$ welcher Bruch etwas kleiner als $\frac{1}{2}$ ist: und daſs für $x=9$ derselbe Ausdruk wird $\frac{55983592650721}{101559956668416}$, welcher Bruch ein wenig gröſser als

$\frac{1}{2}$ ist: hieraus siehet man, daſs es noch nicht vortheilhaft ist, bei gleichen Misen zu wetten, daſs in acht Würfen sechs Augen und ein Pasch fallen werden; daſs es aber unter eben diesen Bedingungen einigermasen vortheilhaft sein wird, zu wetten, daſs diese beiden Begebenheiten, jede wenigstens einmal in neun Würfen mit zwei Würfeln geschehen werden.

§. 61.

Wenn die Wahrscheinlichkeiten dreier Begebenheiten, die von ebenderselben gegebenen Handlung, Bewegung oder Zustande abhängen, $\frac{n}{m}$, $\frac{q}{m}$, $\frac{q'}{m}$ sind; w, y, z die Fälle sind, welche die erste, die zweite, die dritte Begebenheit allein geben; ferner φ, φ', φ'', φ''' diejenigen Fälle sind, welche die erste und die zweite Begebenheit zugleich, die erste und dritte Begebenheit zugleich, die zweite und dritte Begebenheit zugleich, die drei Begebenheiten zugleich geben; und man die Wahrscheinlichkeit zu wissen verlangt, daſs in x Versuchen die erste Begebenheit just r mal, die zweite Begebenheit just t mal, die dritte just t' mal sich ereignen wird: so wird man diese Wahrscheinlichkeit durch eben eine solche Untersuchung finden, wie in der vorhergehenden Aufgabe (§. 54.) nach §. 30. angestellet worden ist. Allein man wird einen weit zusammengesetztern Ausdruk erhalten, dessen Zähler nicht eine einfache Reihe, auch nicht eine Reihe, deren Glieder wiederum Reihen sind, sondern eine Reihe von Gliedern sein wird, davon ein jedes eine solche Reihe sein wird, von welcher jedes einzelne Glied eine Reihe, deren Glieder einfache Reihen sind, ausmachen wird.

* Nämlich 1) Es kann sich zutragen, daſs keiner von den φ, φ', φ'', φ''' Fällen, welche die erste und zweite, erste und dritte, zweite und dritte Begebenheit,

die drei Begebenheiten zugleich geben, in x Versuchen sich ereignet. In diesem Falle ist die Zahl der gleich möglichen Arten r mal die erste Begebenheit

t — — 2te — —

t' — — 3te — — und folglich

$x-r-t-t'$ mal keine von den drei Begebenheiten in x Versuchen zu erhalten (§. 30.) =

$$\frac{x\,.\,(x-1)\,....\,(r+1)}{1.2....t.1.2...t'.1.2..(x-r-t-t')}\,.\,u^{x-r-t-t'}.w^{r}.y^{t}.z^{t'}.$$

2) Es kann sich zutragen, dass nur ein Fall von den φ Fällen, welche die erste und zweite Begebenheit zugleich geben, in einem Versuche sich ereignet. Alsdann ist die Zahl der Arten r mal die erste Begebenheit, t mal die zweite, und t' mal die dritte Begebenheit in x Versuchen zu erhalten (§. 30.) =

$$\frac{x\,(x-1)\,(x-2)\,........\,r}{1.2....(t-1).1.2....t'.1.2....(x-r-t-t'+1)}\times$$

$$u^{x-r-t-t'+1}.w^{r-1}.y^{t-1}.z^{t'}.\frac{1}{1}.\varphi.$$

3) Es kann sich zutragen, dass einer oder zwei von den φ Fällen, welche die erste und zweite Begebenheit zugleich geben, in zwei Versuchen sich ereignen; und in diesem Fall ist die Zahl der Arten r mal die erste Begebenheit, t mal die zweite, und t' mal die dritte in x Versuchen zu erhalten =

$$\frac{x\,(x-1)\,(x-2)\,.....\,(r-1)}{1.2....(t-2).1.2....t'.1.2....(x-r-t-t'+2)}\times$$

$$u^{x-r-t-t'+2}.w^{r-2}.y^{t-2}.z^{t'}.\frac{1}{1.2}\,\varphi^{2}.$$ Und so weiter.

4) Es kann sich endlich zutragen, dass 1, 2, 3,.... oder t von den φ Fällen, welche die erste und zweite Begebenheit zugleich geben, in t Versuchen sich ereignen; dann ist die Anzahl der Arten r mal die erste Be-

gebenheit, t mal die zweite, und t' mal die dritte Begebenheit in x Versuchen zu erhalten, =

$$\frac{x\ (x-1)\ (x-2)\ \ldots\ldots\ (r-t+1)}{1\ .\ 2\ \ldots\ldots\ t'.\ 1\ .\ 2\ \ldots\ (x-r-t')} \times$$

$$u^{x-r-t'} . w^{r-t} . y^{0} . z^{t'} . \frac{1}{1.2\ldots t} . \varphi^{t}.$$

5) Folglich ist die Anzahl der Arten, wenn keiner von den φ', φ'', φ''' Fällen, welche die erste und dritte, zweite und dritte, die drei Begebenheiten zugleich geben, in x Versuchen sich ereignet, r mal die erste Begebenheit, t mal die zweite, und t' mal die dritte Begebenheit in x Versuchen zu erhalten (aus Num. 1, 2, 3, 4) =

$$\frac{x\ .\ (x-1)\ (x-2)\ \ldots\ (r+1)}{1.2\ldots t.1.2\ldots t'.1.2\ldots(x-r-t-t')} . w^{r} . y^{t} . z^{t'} . u^{x-r-t-t'} . 1$$

$$+ \frac{x\ (x-1)\ (x-2)\ \ldots\ldots\ r}{1\ .\ 2\ \ldots\ (t-1)\ .\ 1\ .\ 2\ \ldots\ t'\ .\ 1\ .\ 2\ \ldots(x-r-t-t'+1)} \times$$

$$w^{r-1} . y^{t-1} . z^{t'} . u^{x-r-t-t'+1} . \frac{1}{1}\ \varphi$$

$$+ \frac{x\ (x-1)\ (x-2)\ \ldots\ldots\ (r-1)}{1.2\ldots(t-2).1.2\ldots t'.1.2\ldots\ (x-r-t-t'+2)} \times$$

$$w^{r-2} . y^{t-2} . z^{t'} . u^{x-r-t-t'+2} . \frac{1}{1.2}\ \varphi^{2}$$

$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{x\ (x-1)\ (x-2)\ \ldots\ldots\ (r-t+1)}{1\ .\ 2\ \ldots\ t'\ .\ 1\ .\ 2\ \ldots\ldots\ (x-r-t')} \times$$

$$w^{r-t} . z^{t'} . u^{x-r-t'} . \frac{1}{1\ .\ 2\ \ldots\ t} . \varphi^{t};$$

welche Reihe S heissen mag.

6) Es kann sich zutragen, dass keiner von den φ', φ'', φ''' Fällen in x Versuchen geschiehet; und in dem Falle ist die Zahl der Arten das verlangte Resultat zu erhalten $= S . 1.$

7) Es kann sich zutragen, daſs einer von den φ' Fällen, welche die erste und dritte Begebenheit zugleich geben, in einem Versuche sich ereignet. Alsdann ist die Anzahl der Fälle, r mal die 1ste Begebenheit, t mal die zweite, und t' mal die dritte Begebenheit in x Versuchen zu erhalten =

$$\left(\frac{(x-1)(x-2)\ldots\ldots\ldots r}{1.2\ldots t.1.2\ldots(t'-1).1.2\ldots(x-r-t-t'+1)} \times\right.$$

$$u^{x-r-t-t'+1}.w^{r-1}.y^{t}.z^{t'-1}.1$$

$$+\frac{(x-1)(x-2)\ldots(r-1)}{1.2\ldots(t-1).1.2\ldots(t'-1).1.2\ldots(x-r-t-t'+2)} \times$$

$$u^{x-r-t-t'+2}.w^{r-2}.y^{t-1}.z^{t'-1}.\frac{1}{1}\varphi$$

$$+\frac{(x-1)(x-2)\ldots(r-2)}{1.2\ldots(t-2).1.2\ldots(t'-1).1.2\ldots(x-r-t-t'+3)} \times$$

$$u^{x-r-t-t'+3}.w^{r-3}.y^{t-2}.z^{t'-1}.\frac{1}{1.2}\varphi^{2}$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{(x-1)(x-2)\ldots\ldots(r-t)}{1.2\ldots(t'-1).1.2\ldots(x-r-t'+1)} \times$$

$$\left.u^{x-r-t'+1}.w^{r-t-1}.y^{0}.z^{t'-1}.\frac{1}{1.2\ldots t}.\varphi^{t}\right).\frac{x}{1}\varphi'.$$

Nämlich wenn sich nur einer von den φ' Fällen (und also keiner von den φ'', φ''' Fällen) ereignet; so können sich dazu

entweder 0,

oder ein Fall von den φ Fällen in einem Versuche

1 oder 2 Fälle — — — — 2 Versuchen

1, 2, 3 — — — — — 3 — —

. .

1, 2, 3, ... t — — — — t — —

ereignen. Ereignet sich keiner von den φ Fällen, welche die erste und zweite Begebenheit zugleich geben; so

findet man aus Num. 1. die Anzahl der Arten $(r-1)$ mal die erste, t mal die zweite, und $(t'-1)$ mal die dritte Begebenheit in $(x-1)$ Versuchen zu erhalten, wenn man

statt	x	r	t	t'
setzt	$x-1$	$r-1$	t	$t'-1$

Denn wenn sich nur einer von den φ' Fällen, welche die erste und dritte Begebenheit zugleich geben, in einem Versuche ereignet; so kann sich keiner von den φ, φ', φ'', φ''' Fällen in $(x-1)$ Versuchen ereignen, und also wird in dem Falle die Anzahl der Arten

$$\left.\begin{matrix} (r-1) & & \text{1ste} \\ t & \text{mal die} & \text{2te} \\ (t'-1) & & \text{3te} \end{matrix}\right\} \text{Begebenheit}$$

in $(x-1)$ Versuchen zu erhalten, durch die nur angezeigten Substitutionen gefunden.

Ereignet sich einer von den φ Fällen, welche die erste und zweite Begebenheit zugleich geben, in einem Versuche, so findet man aus Num. 2. die Anzahl der Arten $(r-1)$ mal die erste Begebenheit, t mal die zweite, und $(t'-1)$ mal die dritte Begebenheit in $(x-1)$ Versuchen zu erhalten, wenn man anstatt

anstatt	x	r	t	t'
setzt	$x-1$	$r-1$	t	$t'-1$

Hiedurch erhält man das zweite Glied vorhergehender Reihe.

Das dritte Glied eben dieser Reihe findet man aus Num. 3. wenn man

statt	x	r	t	t'
setzt	$x-1$	$r-1$	t	$t'-1$

Und so weiter. Endlich findet man das letzte Glied dieser Reihe aus Num. 4. wenn man

statt der dortigen	x	r	t	t'
schreibt	$x-1$	$r-1$	t	$t'-1$.

8) Es kann sich zutragen, dass einer oder zwei von den φ' Fällen, welche die erste und dritte Begebenheit zugleich geben, in zwei Versuchen sich ereignen. Alsdann können sich dazu entweder 0; oder 1; oder 1, 2;

oder 1, 2, 3; oder 1, 2, 3, ... t von den φ Fällen, welche die erſte und zweite Begebenheit zugleich geben, in den übrigen $(x-2)$ Verſuchen ereignen. Ereignet ſich keiner von den φ Fällen, ſo findet man aus Num. 1. die Anzahl der Fälle $(r-2)$ mal die erſte, t mal die zweite, und $(t-2)$ mal die dritte Begebenheit in $(x-2)$ Verſuchen zu erhalten, wenn man

anſtatt x	r	t	t'
ſchreibt $x-2$	$r-2$	t	$t'-2$

$$= \frac{(x-2)(x-3)\ldots\ldots(r-1)}{1.2\ldots t.1.2\ldots(t'-2).1.2\ldots(x-r-t-t'+2)} \times u^{x-r-t-t'+2}.w^{r-2}.y^{t}.z^{t'-2}.$$

Ereignet ſich einer von den φ Fällen, ſo findet man aus Num. 2. die Anzahl der Fälle $(r-2)$ mal die erſte Begebenheit, t mal die zweite, und $(t'-2)$ mal die dritte Begebenheit in $(x-2)$ Verſuchen zu erhalten, wenn man

anſtatt x	r	t	t'
ſetzt $x-2$	$r-2$	t	$t'-2$

$$= \frac{(x-2)(x-3)\ldots\ldots(r-2)}{1.2\ldots(t-1)1.2\ldots(t'-2)1.2\ldots(x-r-t-t'+3)} \times u^{x-r-t-t'+3}.w^{r-3}.y^{t-1}.z^{t'-2}.\frac{1}{1}\varphi$$

Das folgende Glied bekömmt man aus Num. 3, wenn man für x, r, t, t' die eben genannten Werthe ſetzt =

$$\frac{(x-2)(x-3)\ldots\ldots(r-3)}{1.2\ldots(t-2)1.2\ldots(t'-2)1.2\ldots(x-r-t-t'+4)} \times u^{x-r-t-t'+4}.w^{r-4}.y^{t-2}.z^{t'-2}.\frac{1}{1.2}.\varphi^2$$

Und ſo weiter. Endlich hat man das letzte Glied (aus Num. 4.) =

$$\frac{(x-2)(x-3)\ldots\ldots(r-t-1)}{1.2\ldots(t'-2).1.2\ldots(x-r-t'+2)} \times$$

$$u^{x-r-t'+2} \,.\, w^{r-t-2} \,.\, y^{0} \,.\, z^{t'-2} \,.\, \frac{1}{1\,.\,2\ldots t} \,.\, \varphi^{t}$$

Wenn sich also einer oder zwei von den φ' Fällen, welche die erste und dritte Begebenheit zugleich geben, in zwei Versuchen ereignen; so ist die Anzahl der Arten r mal die erste Begebenheit, t mal die zweite, und t' mal die dritte in x Versuchen zu erhalten =

$$\Big(\frac{(x-2)(x-3)\ldots\ldots(r-1)}{1.2\ldots t.1.2\ldots(t'-2).1.2\ldots(x-r-t-t'+2)} \times$$

$$u^{x-r-t-t'+2} \,.\, w^{r-2} \,.\, y^{t} \,.\, z^{t'-2} \,.\, 1 \;+$$

$$\frac{(x-2)(x-3)\ldots\ldots(r-2)}{1.2\ldots(t-1).1.2\ldots(t'-2).1.2\ldots(x-r-t-t'+3)} \times$$

$$u^{x-r-t-t'+3} \,.\, w^{r-3} \,.\, y^{t-1} \,.\, z^{t'-2} \,.\, \frac{1}{1}\,\varphi \;+$$

$$\frac{(x-2)(x-3)\ldots\ldots(r-3)}{1.2\ldots(t-2).1.2\ldots(t'-2).1.2\ldots(x-r-t-t'+4)} \times$$

$$u^{x-r-t-t'+4} \,.\, w^{r-4} \,.\, y^{t-2} \,.\, z^{t'-2} \,.\, \frac{1}{1.2}\,\varphi^{2} \;+$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots +$$

$$\frac{(x-2)(x-3)\ldots\ldots(r-t-1)}{1.2\ldots(t'-2).1.2\ldots(x-r-t'+2)} \times$$

$$u^{x-r-t'+2} \,.\, w^{r-t-2} \,.\, y^{0} \,.\, z^{t'-2} \,.\, \frac{1}{1.2\ldots t}\,\varphi^{t}\Big) \,.\, \frac{x(x-1)}{1\,.\,2}\,\varphi^{1\,2}.$$

9) Fährt man auf diese Art zu schliessen fort; so bekömmt man folgende endliche Reihe, wo statt der Faktorenreihen Sternchen gesetzt worden sind:

$$S.\,1 + {*}.\frac{x}{1}\varphi^{1} + {*}.\frac{x(x-1)}{1\,.\,2}\varphi^{1\,2} + {*}.\frac{x(x-1)(x-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\varphi^{1\,3} + \ldots$$

$$\ldots + {*}.\frac{x(x-1)\ldots\ldots(x-t'+1)}{1\,.\,2\,\ldots\ldots\,t'}\varphi^{1\,t'}$$; welche

S^{1} heissen mag.

Die letzte, dem Faktor $\varphi'^{t'}$ zugehörige Reihe findet man aus Num. 1, 2, 3, 4, wenn man

anstatt	x	r	t	t'
	$x-t'$	$r-t'$	t	$t'-t'$ setzt.

10) Es kann sich zutragen, dafs keiner von den φ'', φ''' Fällen in x Versuchen geschiehet; alsdann ist die Zahl der Arten, r mal die erste Begebenheit, t mal die zweite, und t' mal die dritte Begebenheit in x Versuchen zu erhalten $= S'. 1.$

11) Es kann sich zutragen, dafs einer von den φ'' Fällen, welche die zweite und dritte Begebenheit zugleich geben, in einem Versuche sich ereignet; dann können sich zugleich entweder 0,
oder 1 Fall von den φ' Fällen in einem Versuche,
— 1 oder 2 Fälle — — — 2 Versuchen,
— 1 — 2 oder 3 Fälle — — 3 — —
. .
— 1, 2, 3, ... t' — — — t' — —
ereignen. Ereignet sich keiner von den φ' Fällen, welche die erste und dritte Begebenheit zugleich geben, so findet man aus Num. 6. die Anzahl der Fälle r mal die erste Begebenheit, $(t-1)$ mal die zweite, $(t'-1)$ mal die dritte in $(x-1)$ Versuchen zu erhalten, wenn man

anstatt	x	r	t	t'
setzt	$x-1$	r	$t-1$	$t'-1$

Ereignet sich ein Fall von den φ' Fällen in einem Versuche, so findet man die Anzahl der Fälle r mal die erste Begebenheit, $(t-1)$ mal die zweite, und $(t'-1)$ mal die dritte Begebenheit in $(x-1)$ Versuchen zu erhalten, wenn man die vorhin genannten Werthe für x, r, t, t' in 7) schreibt. Und so weiter. Die Summe dieser Reihen wird in $\frac{x}{1}\,\varphi''$ multiplicirt.

12) Setzt man die Betrachtung auf diese Art fort; so kommt man zuletzt auf folgende endliche Reihe:

$$S'.1 + * \frac{x}{1} \varphi'' + * \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \varphi''^{2} + * \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \varphi''^{3} + \ldots$$

$$\ldots + * \frac{x(x-1) \ldots (x-t'+1)}{1 \cdot 2 \ldots t'} \varphi''^{t'} = S''.$$

13) Es kann sich endlich zutragen, dass keiner von den φ''' Fällen, welche die drei Begebenheiten zugleich geben, sich ereignet; und alsdann ist die Anzahl der Arten r mal die erste Begebenheit, t mal die zweite, und t' mal die dritte Begebenheit in x Versuchen zu erhalten, die in voriger Nummer 12. gefundene Reihe $= S''.1$.

14) Es kann sich zutragen, dass einer von den φ''' Fällen, welche die drei Begebenheiten zugleich geben, in einem Versuche sich ereignet, und dazu keiner von den φ'' Fällen; so findet man die Anzahl der Arten, r mal die erste Begebenheit, t mal die zweite, und t' mal die dritte in x Versuchen zu erhalten, wenn man in 10, $r = r-1$, $t = t-1$, $t' = t'-1$, $x = x-1$ setzt, und die auf diese Art veränderte Reihe S' in $\frac{x}{1} \varphi'''$ multiplicirt.

Auf ähnliche Art werden die folgenden Glieder der Reihe S'': $* \frac{x}{1} \varphi''$; $* \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} \varphi''^{2}$; u. s. f. umgeändert, und die Summe aller wird in $\frac{x}{1} \varphi'''$ multiplicirt.

15) Bei der nächstfolgenden Untersuchung wird die gehörig veränderte Reihe S'' in $\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2} . \varphi'''^{2}$ gevielfältigt.

16) Bis man auf folgende Reihe kommt: $S''' =$

$$S''.1 + * \frac{x}{1} \varphi''' + * \frac{x.(x-1)}{1 \cdot 2} \varphi'''^{2} + * \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \varphi'''^{3} + \ldots$$

$$\ldots + * \frac{x(x-1)(x-2)\ldots(x-t'+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots t'} \cdot \varphi'''^{t''};$$

welche der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit sein wird, deren Nenner $= m^x$ ist.

17) Die ganze Untersuchung beruhet also auf folgenden vier Punkten:

Anfänglich erhält man eine Reihe S (Num. 5.) von Gliedern, davon das erste in 1, das zweite in $\frac{x}{1}\varphi$, das dritte in $\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}\varphi^2$, das vierte in $\frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\varphi^3$, und so weiter, endlich das letzte in $\frac{x(x-1)\ldots(x-t+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots t}\varphi^t$ multiplicirt ist. (Num. 1:5).

Diese Reihe (S) ist das erste Glied einer andern Reihe S^1 (Num. 9) davon jedes folgende Glied eine ähnliche Reihe wie S ist, und das erste Glied in 1, das zweite in $\frac{x}{1}\varphi^1$, das dritte in $\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}\varphi'^{2}$, das vierte in $\frac{x(x-1)(x-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\varphi'^{3}$, u. s. w. das letzte in $\frac{x\ldots\ldots(x-t'+1)}{1 \cdot 2 \ldots t'}\varphi'^{t'}$ multiplicirt ist. (Num. 6 : 9).

Diese letzte Reihe (S^1) ist wiederum das erste Glied von einer neuen Reihe S'' (Num. 12.) davon jedes folgende Glied eine ähnliche Reihe wie S^1 ist, und das erste in 1, das zweite in $\frac{x}{1}\varphi''$, das dritte in $\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}\varphi''^{2}$, u. s. f. das letzte in $\frac{x\ldots(x-t'+1)}{1 \cdot 2 \ldots t'}\varphi''^{t'}$ gevielfältigt ist. (Num. 10 : 12.).

Endlich iſt die ſolchergeſtalt erhaltene Reihe (S'') das erſte Glied einer Reihe S''', (Num. 16.) deren jedes folgende Glied eine ähnliche Reihe, wie S'' iſt, und nach und nach in $\frac{x}{1}\varphi'''$, $\frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}\varphi'''^{2}$, ... $\frac{x(x-1)\ldots\ldots(x-t'+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots t'} \cdot \varphi'''^{t'}$ multiplicirt iſt; welches die Reihe in Num. 16. giebt, die der Zähler der geſuchten Wahrſcheinlichkeit iſt. (Num. 13-16.)

§. 62.

Uebrigens kann man, vermittelſt der (in §. 61. Num. 16.) gefundenen Wahrſcheinlichkeit, die Wahrſcheinlichkeiten finden, daſs, wenn die erſte Begebenheit juſt, oder höchſtens oder wenigſtens r mal, und die zweite juſt, höchſtens oder wenigſtens t mal ſich ereignet; die dritte Begebenheit juſt oder höchſtens oder wenigſtens t' mal ſich ereignen wird; nach der in §. 59. angezeigten Methode.

§. 63.

Man könnte dieſe Unterſuchungen noch weiter ausdehnen, und die Wahrſcheinlichkeiten ſuchen, in x Verſuchen juſt, oder wenigſtens, oder höchſtens r mal eine Begebenheit zu erhalten, deren Wahrſcheinlichkeit in einem Verſuche $\frac{n}{m}$ iſt, t mal eine Begebenheit zu erhalten, deren Wahrſcheinlichkeit $\frac{q}{m}$ iſt, t' mal eine Begebenheit, deren Wahrſcheinlichkeit $\frac{q'}{m}$, t'' mal eine Begebenheit, deren Wahrſcheinlichkeit $\frac{q''}{m}$, t''' mal eine Begebenheit, deren Wahrſcheinlichkeit $\frac{q'''}{m}$ iſt, u. ſ. f. Aber

dieſe Rechnungen würden ſehr weit führen, und überdiemaſen weitläuftig ſein. Es iſt genug, daſs wir unſern Leſern die Bahn dazu gebrochen, und ſie in den Stand geſetzt haben, dergleichen Rechnungen, wenn ſie nöthig ſind, ſelbſt anzuſtellen: ohne ſie hier unnützerweiſe durch trokne und zu verwikelte Speculationen zu ermüden.

§. 64.

Wenn man für eine jede von den beſtimmten Begebenheiten den Verſuch angiebt, in welchem ſie ſich ereignen ſoll: ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs die beſtimmten Begebenheiten, eine jede von derſelben, in dem ihr angewieſenen Verſuche geſchehen wird, aus den Wahrſcheinlichkeiten der beſtimmten Begebenheiten zuſammengeſetzt, oder das Produkt dieſer Wahrſcheinlichkeiten. (Kap. II. §. 4, 5, 6, 7).

Z. E. Wenn die Begebenheit, deren Wahrſcheinlichkeit $\left\{\begin{array}{ll} \frac{n}{m} & \text{1sten} \\ \frac{p}{m} \text{ iſt, im} & \text{2ten} \\ \frac{q}{m} & \text{3ten} \end{array}\right\}$ Verſuche ſich ereignen ſoll: ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit des Zuſammengeſchehens dieſer drei Begebenheiten auf die erwähnte Art, $\frac{npq}{m^3}$.

§. 65.*

Beispiel. Wie groſs iſt die Wahrſcheinlichkeit, mit einem Würfel in ſechs Würfen zuerſt ein As, dann eine 2, hierauf eine 3, alsdann eine 4, dann eine 5, und zuletzt 6 zu werfen?

Weil hier alle ſechs verſchiedene Seiten des Würfels in einer gewiſſen Ordnung geworfen werden ſollen: ſo giebt es für jeden Wurf nur einen einzigen Fall; da nun die Anzahl aller Fälle in einem Verſuche $= 6$ iſt; ſo iſt die geſuchte Wahrſcheinlichkeit, =

$$\frac{1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{1}{46656}.$$

S. Kap. II. §. 8.

§. 66.

Sollen ſich nur zwei allein von den drei beſtimmten Begebenheiten in den ihnen angewieſenen Verſuchen ereignen; ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit dieſer Begebenheit $= \frac{np(m-q) + nq(m-p) + pq(m-n)}{m^3}$. *)

§. 67.

*) Denn es ereignet ſich entweder diejenige Begebenheit,

$$\text{deren Wahrſcheinlichkeit} = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{n}{m}, & \text{1ſten} \\ \frac{p}{m} \text{ iſt, im} & \text{2ten} \\ 1-\frac{q}{m}, & \text{3ten} \end{array} \right\} \text{Verſuche;}$$

$$\begin{array}{l}\text{oder diejenige Begebenheit,} \\ \text{deren Wahrſcheinlichkeit} =\end{array} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{n}{m}, & \text{1ſten} \\ 1-\frac{p}{m} \text{ iſt, im} & \text{2ten} \\ \frac{q}{m}, & \text{3ten} \end{array} \right\} \text{Verſuche;}$$

oder

§. 67.*

Beispiel. Was iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs die Begebenheit (§. 65.) nur in zwei Würſen eintreffen wird?

Die geſuchte Wahrſcheinlichkeit iſt =

$$(1.1.5^4 + 1.1.5^4 + 1.1.5^4 + 1.1.5^4 + 1.1.5^4$$
$$+ 1.1.5^4 + 1.1.5^4 + 1.1.5^4 + 1.1.5^4$$
$$+ 1.1.5^4 + 1.1.5^4 + 1.1.5^4$$
$$+ 1.1.5^4 + 1.1.5^4$$
$$+ 1.1.5^4):6^6$$

$$= \frac{5^5 + 5^4.4 + 5^4.3 + 5^4.2 + 5^4}{6^6} = \frac{9375}{46656}.$$

oder die, deren Wahrſcheinlichkeit = $\left\{\begin{array}{ll} 1 - \frac{n}{m}, & \text{1ſten} \\ \frac{p}{m} \text{ iſt, im} & \text{2ten} \\ \frac{q}{m} & \text{3ten} \end{array}\right\}$ Verſuche,

Daſs alſo die geſuchte Wahrſcheinlichkeit ſein wird:

$$\frac{np}{m^2}.\left(1 - \frac{q}{m}\right) + \frac{nq}{m^2}.\left(1 - \frac{p}{m}\right) + \frac{pq}{m^2}.\left(1 - \frac{n}{m}\right)$$

oder $[np(m - q) + nq(m - p) + pq(m - n)] : m^3$.
W. Z. E.

Kommt noch eine vierte Begebenheit, deren Wahrſcheinlichkeit $\frac{r}{m}$ iſt, hinzu; ſo wird bei vier Begebenheiten eben dieſe Wahrſcheinlichkeit ſein:

$$(np(m-q)(m-r) + nq(m-p)(m-r) + nr(m-p)(m-q)$$
$$+ pq(m-n)(m-r) + pr(m-n)(m-q)$$
$$+ qr(m-n)(m-p)) : m^4$$

Und ſo weiter.

Anm. des Ueberſ.

§. 68.

Wenn sich nur eine einzige von drei bestimmten Begebenheiten in demjenigen Versuche ereignen soll, der ihr angewiesen worden ist; so ist die Wahrscheinlichkeit

$$\frac{n}{m}\cdot\left(1-\frac{p}{m}\right)\left(1-\frac{q}{m}\right)+\frac{p}{m}\left(1-\frac{n}{m}\right)\left(1-\frac{q}{m}\right)+\frac{q}{m}\left(1-\frac{n}{m}\right)\left(1-\frac{p}{m}\right)=$$

$$\frac{n(m-p)(m-q)+p(m-n)(m-q)+q(m-n)(m-p)}{m^3}.$$

Wenn sich keine von drei gegebenen Begebenheiten in dem ihr angewiesenen Versuche ereignen soll; so ist die Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{(m-n)(m-p)(m-q)}{m^3}.$$

Sollen sich wenigstens zwei von drei bestimmten Begebenheiten in den Versuchen ereignen, die ihnen angewiesen worden sind: so ist diese Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{npq+np(m-q)+nq(m-p)+pq(m-n)}{m^3} \text{ oder}$$

$$\frac{mnp+(n(m-p)+(m-n)p)q}{m^3}.$$

Wenn höchstens eine von drei Begebenheiten in dem ihr angewiesenen Versuche geschehen soll: so ist die Wahrscheinlichkeit =

$$\frac{(m-n)(m-p)(m-q)}{m^3}+$$

$$\frac{n(m-p)(m-q)+p(m-n)(m-q)+q(m-n)(m-p)}{m^3}=$$

$$\frac{m(m-p)(m-q)+(m-n)(p(m-q)+q(m-p))}{m^3}.$$

Verlangt man, daſs in x Verſuchen, wenigſtens zwei von drei beſtimmten Begebenheiten in den angegebenen Verſuchen geſchehen ſollen, und daſs eine vierte Begebenheit, deren Wahrſcheinlichkeit $\frac{r}{m}$ iſt, wenigſtens einmal in den $(x-3)$ übrigen Verſuchen ſich ereignet; ſo wird die Wahrſcheinlichkeit dieſer Begebenheit ſein: $\frac{mnp+q(n(m-p)+p(m-n))}{m^3}\cdot\left[1-\left(1-\frac{r}{m}\right)^{x-3}\right]$. Und ſo ferner fort.

§. 69.

Wenn man, anſtatt die Handlung oder Bewegung, wovon die Begebenheiten abhängen, eine Anzahl von malen x hinter einander zu wiederholen; x ähnliche Handlungen oder Bewegungen zu gleicher Zeit hätte, oder ſie auf einmal hervorbrächte, ſo würde offenbar die geſuchte Wahrſcheinlichkeit ebendieſelbe ſein. *)

Wenn alſo die Wahrſcheinlichkeit einer gegebenen Begebenheit $\frac{n}{m}$ iſt, und man x Handlungen oder Bewegungen zu gleicher Zeit hat, oder ſolche auf einmal hervorbringt, die derjenigen, wovon dieſe Begebenheit abhängt, gleich ſind; ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit dieſe Begebenheit juſt r mal zu erhalten,

$$\frac{x(x-1)\ldots(x-r+1)}{1\,.\,2\,\ldots\,r}\cdot\frac{n^r}{m^x}\cdot(m-n)^{x-r}\quad(\text{§. } 32.);$$

*) Iſt z. B. jemanden mit zehn Würfeln ein Wurf erlaubt; ſo iſt es völlig gleichgültig, ob er dieſe zehn Würfel auf einmal, oder nach und nach einen nach dem andern auf den Tiſch wirft: und wenn er es auf die letztere Art verrichtet, ſo iſt es wiederum einerlei, ob er es mit zehn verſchiedenen Würfeln, oder mit einem und ebendemſelben Würfel vornimmt.

Anm. des Ueberſ.

wenigſtens r mal,

$$1-\left(1-\frac{n}{m}\right)^x\cdot\left(1+x\cdot\frac{n}{m-n}+\frac{x(x-1)}{1\,.\,2}\cdot\left(\frac{n}{m-n}\right)^2+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{x(x-1)\ldots(x-r+2)}{1\,.\,2\ldots(r-1)}\cdot\left(\frac{n}{m-n}\right)^{r-1}\right)\ (\S.\ 45.);$$

höchſtens r mal,

$$\left(1-\frac{n}{m}\right)^x\cdot\left(1+x\cdot\frac{n}{m-n}+\frac{x(x-1)}{1\,.\,2}\cdot\left(\frac{n}{m-n}\right)^2+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{x(x-1)\ldots(x-r+1)}{1\,.\,2\ldots\ldots r}\left(\frac{n}{m-n}\right)^r\right)\ (\S.\ 41.);$$

wenigſtens einmal, $1-\left(1-\frac{n}{m}\right)^x$ (§. 5.);

höchſtens einmal, $\left(1-\frac{n}{m}\right)^x\cdot\left(1+x\cdot\frac{n}{m-n}\right)$ (§. 42.);

juſt einmal, $\frac{x}{1}\cdot\frac{(m-n)^{x-1}\cdot n}{m^x}$ (§. 34.).

Sind zwei Begebenheiten gegeben, davon die Wahrſcheinlichkeiten $\frac{n}{m}$, $\frac{q}{m}$ ſind, und wo die Anzahl der Fälle, welche die zwei Begebenheiten zugleich geben, φ iſt; und hat man zu gleicher Zeit, oder bringt auf einmal eine Anzahl x von Handlungen oder Bewegungen hervor, die derjenigen, wovon dieſe zwei Begebenheiten abhängen, gleich ſind: ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, dieſe zwei Begebenheiten, die erſte juſt r mal, und die zweite juſt t mal zu erhalten, der (§. 54. VII.) gefundene allgemeine Ausdruk. Die Wahrſcheinlichkeiten dieſe zwei Begebenheiten zu erhalten, die erſte $\left[\begin{array}{l}\text{höchſtens}\\ \text{wenigſtens}\end{array}\right]$ r mal, und die zweite juſt t mal, werden die Formeln A und B ſein (§. 59. I.); die zweite

$\left[\begin{array}{l}\text{höchſtens}\\ \text{wenigſtens}\end{array}\right]$ t mal, und die erſte juſt r mal, werden die Formeln C und D ſein (ebendaſelbſt II.); die erſte höchſtens r mal, und die zweite $\left[\begin{array}{l}\text{höchſtens}\\ \text{wenigſtens}\end{array}\right]$ t mal, werden die Formeln E und F ſein; die erſte wenigſtens r mal und die zweite $\left[\begin{array}{l}\text{höchſtens}\\ \text{wenigſtens}\end{array}\right]$ t mal, werden die Formeln G und H anzeigen.

Die Wahrſcheinlichkeit, eine jede wenigſtens einmal zu erhalten, iſt die Formel

$$\frac{m^x-(m-n)^x-(m-q)^x+(m-n-q+\phi)^x}{m^x} \quad (\S.\ 56.).$$

Sind ſo viel Begebenheiten gegeben, als man will, deren Wahrſcheinlichkeiten $\frac{n}{m}$, $\frac{q}{m}$, $\frac{q'}{m}$, $\frac{q''}{m}$, ..., und iſt o die Anzahl der Fälle, welche mehrere von dieſen Begebenheiten zugleich geben: und bringet man zu gleicher Zeit eine Anzahl x von Handlungen oder Bewegungen hervor, die derjenigen gleich ſind, von welcher alle dieſe Begebenheiten abhängen: ſo wird die Wahrſcheinlichkeit, juſt r mal die erſte Begebenheit, t mal die zweite, t' mal die dritte, t'' mal die vierte, ... zu erhalten, die (§. 28. IV; §. 30.) gefundene allgemeine Formel ſein. So iſt die Wahrſcheinlichkeit mit zwanzig Würfeln zugleich dreimal ein Aſs, fünfmal eine zwei, zweimal eine drei, viermal eine vier, fünfmal eine fünfe und einmal eine ſechſe zu werfen $\frac{56581525}{352638738432}$ (§. 29.)

Wenn acht Perſonen zu gleicher Zeit jede zwei Würfel auf einen Tiſch werfen, ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, daſs zwei von dieſen Perſonen, fünf und vier

Augen, daſs zwei 3 und 2 Augen werſen werden, daſs eine allein ſechs und ſechs, und eine fünf und fünf werſen wird, $\frac{875}{34012224}$ (§. 31.)

Kapitel VIII.

Berechnung der Wahrſcheinlichkeiten mittelſt Analyſe der vorgelegten Fragen.

§. 1.

Die unendliche Mannichfaltigkeit der Fragen, welche die Wahrſcheinlichkeiten betreffend vorgelegt werden können, verſtattet nicht eine allgemeine Regel anzugeben, vermittelſt welcher alle Wahrſcheinlichkeiten, die man zu wiſſen verlangen könnte, ſich genau berechnen lieſsen. Demohngeachtet haben wir in den vorhergehenden Kapiteln Sätze von der gröſsten Allgemeinheit vorgetragen, mittelſt welcher man leicht eine unendliche Menge von Fragen dieſer Art, und inſonderheit den meiſten Theil derer, welche auf die gewöhnlichen Glüksſpiele ſich beziehen, aufzulöſen im Stande ſein wird Auch haben wir uns dieſe Sätze durch Beiſpiele, die ihre Anwendung zeigen, aufzuklären bemüht. Gegenwärtiges Kapitel nebſt den beiden darauf folgenden iſt dazu beſtimmt, die Leſer mit dem Gebrauche dieſer Sätze je mehr und mehr vertraut zu machen, und durch die Auflöſung einzelner Fragen zu zeigen, wie man die Wahrſcheinlichkeiten durch Hülfe der Analyſe und der Geometrie, wenn anders dieſe Fragen die Anwendung derſelben erlauben, genau berechnen kann.

§. 2.

Frage I. *Ich ſpiele Whiſt, und gebe. Wie groſs wird die Wahrſcheinlichkeit ſein, daſs meine Handkarte aus*

dreizehn Karten von der Trumpffarbe bestehen wird; oder welches einerlei ist, daſs ich allein alle Trümpfe in die Hand bekommen werde?

Auflösung. 1. Um den Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit zu erhalten: ist zu bemerken, daſs, angenommen daſs ich die dreizehn Trümpfe in der Hand habe, die 39 alsdann noch übrigen Kartenblätter unter die drei andern Spieler auf $\frac{39 \ldots 14}{(1.2\ldots13)^2}$ Arten ausgetheilt werden können (Kap. 5. §. 13); folglich ist diese Zahl der gesuchte Zähler.

2. Um den Nenner zu bekommen, ist zu merken, daſs die Anzahl der Arten, auf welche die 52 Blätter des ganzen Spiels zu vier gleichen Theilen unter die vier spielenden Personen ausgetheilt werden können, ist $\frac{52 \ldots 14}{(1.2\ldots14)^3}$ (Kap. V. §. 12, 2. und §. 13.); welche den Nenner giebt. Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{39 \ldots 14}{(1.2\ldots13)^2} : \frac{52 \ldots 14}{(1.2\ldots13)^3} = \frac{1.2\ldots13}{52\ldots40} = \frac{1}{635013559600}.$$

§. 3.

Frage 2. *Ich und Peter wollen Piket mit einander spielen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, daſs ich die vier Tertien-Major gleich nach dem Kartengeben ohne zu kaufen beisammen haben werde?*

Auflösung. Der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit wird folgendergestalt gefunden: Gesetzt, daſs ich die vier Tertien-Major in der That erhalte, so können dann die zwanzig übrig gebliebenen Karten zwischen Petern und der Kaufkarte ausgetheilt, das ist, in zwei Theile, den einen von zwölf und den andern von acht Blättern, zerlegt werden, auf $\frac{20 \ldots 13}{1.2\ldots8}$ Arten (Kap. V.

§. 5.). Diese Zahl ist also der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit. Der Nenner ist die Anzahl der Arten, auf welche 32 Karten in drei Theile, zwei zu zwölf und einen zu acht Blättern getheilt werden können, das ist $\frac{32 \ldots 21}{1.2 \ldots 12} \cdot \frac{20 \ldots 13}{1.2 \ldots 8}$ (Kap. V. §.12, 1.). Demnach ist die verlangte Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{20 \ldots 13}{1.2 \ldots 8} : \frac{32 \ldots 21}{1.2 \ldots 12} \cdot \frac{20 \ldots 13}{1.2 \ldots 8} = \frac{1.2 \ldots 12}{32 \ldots 21} = \frac{1}{225792840}.$$

§. 4.

Frage 3. *Peter, mit dem ich Piket spielen will, erhalte von mir die vier Tertien-Major, und ich nehme für mich, ohne zu wählen, zwölf Blätter aus den zwanzig übrig gebliebenen. Man fragt, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, daß ich, ehe ich kaufe, einen Neunziger machen werde?*

Auflösung. 1. Ich kann nicht anders als mittelst zwei schlechter Quinten einen Neunziger machen. Nun befinden sich unter den 20 Karten, die nach Hinwegnehmung der Karten des Peter übrig geblieben sind, vier schlechte Quinten, davon ich zwei auf $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}$ oder sechs verschiedene Arten erhalten kann, weil es $\frac{4 \ldots (4-2+1)}{1 \cdot 2}$ verschiedene Arten giebt, 2 aus vier zu nehmen (Kap. V. §. 5.). Aber auf was für eine Art ich die zwei nöthigen Quinten auch erhalten mag, so sind noch zehn Blätter übrig, woraus ich, um meine Karte zu ergänzen, noch zwei haben muss. Da nun zwei aus zehn auf $\frac{10 \ldots (10-2+1)}{1 \cdot 2}$, oder 45 Arten genommen werden können; so ist 6 . 45 der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit.

2. Der Nenner ist die Anzahl der Arten, auf welche man zwölf aus zwanzig nehmen kann, das ist $\frac{20 \ldots 9}{1.2 \ldots 12}$. Also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $=$

$$6 . 45 : \frac{20 \ldots 9}{1.2 \ldots 12} = \frac{9}{4199}.$$

§. 5.

Frage 4. *Ich spiele mit Petern das Trumpfspiel; wir haben ein jeder unsere Karte in der Hand, und ein Koeur ist Trumpf; ich habe zwei Koeur unter meiner Karte. Wie grofs wird die Wahrscheinlichkeit für mich sein, dafs Peter wenigstens drei Koeur in seiner Karte hat?*

Auflösung. 1. Den Zähler der verlangten Wahrscheinlichkeit zu bekommen, bemerke man, dafs acht Koeur überhaupt in der Spielkarte befindlich sind, dafs ich zwei davon in meiner Handkarte habe, und eins Trumpf ist; daher nur noch fünf Koeur für Petern übrig sind. Um also zu erfahren, auf wie viel mögliche Arten Peter in seiner Karte wenigstens drei von diesen fünf Koeur haben kann, läfst sich die vorgelegte Frage folgendergestalt ausdrüken: Aus 26 verschiedenen Karten sondere man fünf aus, und ziehe auch fünf heraus; auf wie viel Arten ist es möglich, dafs unter den fünf gezogenen sich wenigstens drei von den fünf ausgesonderten befinden werden? Um diese Frage aufzulösen, setze man in dem Zähler der allgemeinen Formel des Kap. V. §. 32. (das ist, in der Reihe allein) $m=26$, $n=5$, $r=3$; so verwandelt sie sich in

$$1+5.21+\frac{5.4}{1.2}.\frac{21.20}{1.2}=2206,$$

welches der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit sein wird.

2. Den Nenner zu erhalten, bemerke ich, dafs Peter seine Spielkarten nicht anders, als aus den 26 Blät-

tern, die mir unbekannt sind, erhalten kann; denn es können weder die fünf Blätter meiner Handkarte, noch das gewählte Trumpfblatt darunter sein. Die Frage wird also auf folgende gebracht, zu bestimmen, auf wie viel Arten sich fünf Karten aus 26 nehmen lassen; diese Zahl der Arten ist

$$\frac{26\ldots.(26-5+1)}{1\,.\,2\ldots.5} = 65780,$$

welches der gesuchte Nenner sein wird. Also ist die verlangte Wahrscheinlichkeit $\frac{2206}{65780} = \frac{1103}{32890}$.

§. 6.

Frage 5. *Ich, Peter, Jakob und Johann spielen Whist mit einander, ein jeder hält seine Karte in der Hand, ich habe vier Koeur in meiner Karte, davon eins das Wählblatt ist. Was ist die Wahrscheinlichkeit für mich, dass Peter in seiner Karte vier Koeur, Jakob drei, und folglich Johann zwei Koeur hat?*

Auflösung. 1. Um zu finden, auf wie viel Arten die bestimmte Begebenheit statt finden kann, oder welches einerlei ist, den Zähler der verlangten Wahrscheinlichkeit zu erhalten, kommt es darauf an, dass man zuerst suche, auf wie viel Arten die (4+3+2) oder neun Koeur, welche nicht mit in meiner Handkarte sind, in drei Theile, den ersten von vier für Petern, den zweiten von drei für Jakob, und folglich den dritten von zwei für Johann zerleget werden können. Um diese Anzahl von Arten zu erhalten, muss man in der allgemeinen Formel

$$\frac{m\ldots.(m-q+1)}{1\,.\,2\ldots.q} \cdot \frac{(m-q)\ldots.(m-q-q'+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,q'}$$ (Kap. V. §. 6. und 7.) $m=9$, $q=4$, $q'=3$ und $m-q-q'=2$ setzen; hiedurch verwandelt sie sich in $\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2}$.

Aber zu einer jeden von dieſen Arten müſſen die 30 übrigen Kartenblätter in drei Theile, den einen von neun Blättern für Petern, den zweiten von zehn Blättern für Jakob, und den dritten von eilf Blättern für Johann eingetheilt werden, welches auf $\frac{30 \ldots\ldots 10}{1.2\ldots.10.1.2\ldots.11}$ Arten geſchehen kann. Folglich iſt der Zähler der geſuchten Wahrſcheinlichkeit:

$$\frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.1.2} \cdot \frac{30 \ldots\ldots 10}{1.2\ldots.10.1.2\ldots.11}.$$

2. Der Nenner iſt die Anzahl der Arten, auf welche die 39 Blätter, welche nicht in meiner Karte ſind, zu drei gleichen Theilen unter die drei Mitſpieler Peter, Jakob und Johann vertheilt werden können. Nun iſt aber die Anzahl der Arten, auf welche 39 Karten in drei gleiche Theile eingetheilt werden können, $\frac{39\ldots.14}{(1.2\ldots13)^2}$; und zu einer jeden von dieſen Arten können die drei Theile zwiſchen Peter, Jakob und Johann wiederum auf 1 . 2 . 3 oder 6 Arten ausgetheilt werden (Kap. VI. §. 4.); denn wenn Peter den $\left[\begin{array}{l}\text{1ſten}\\ \text{2ten}\\ \text{3ten}\end{array}\right.$ Theil erhält, ſo

$$\text{kann Jakob den} \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l}\text{2ten}\\ \text{3ten}\end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{l}\text{1ſten}\\ \text{3ten}\end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{l}\text{1ſten}\\ \text{2ten}\end{array}\right] \end{array}\right. \text{ und Johann den } \left.\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l}\text{3ten}\\ \text{2ten}\end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{l}\text{3ten}\\ \text{1ſten}\end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{l}\text{2ten}\\ \text{1ſten}\end{array}\right] \end{array}\right\}$$

erhalten. Folglich iſt der Nenner der geſuchten Wahrſcheinlichkeit $6 . \frac{39 \ldots\ldots\ldots 14}{(1 . 2 \ldots\ldots 13)^2}$; und alſo

diese Wahrscheinlichkeit

$$\frac{9 \ldots\ldots 5}{1.2.3.1.2} \cdot \frac{30 \ldots\ldots 10}{1.2 \ldots 10.1.2 \ldots 11} : 6 \cdot \frac{39 \ldots 14}{(1.2 \ldots 13)^2} = \frac{9295}{740962}.$$

Kapitel IX.
Vom Lotto.

§. 1.

Frage. 6. *Es hat jemand eine von den neunzig Nummern des Zahlen-Lotto zu einem einfachen Auszuge, oder zwei zu einer einfachen Ambe, oder drei zu einer Terne, oder vier zu einer Quaterne, oder fünf zu einer Quine besetzt. Man fragt, wie groß in jedem Falle die Wahrscheinlichkeit sein wird, daß alle diese Nummern am nächsten Ziehungstage herauskommen werden?*

Auflösung. Man setze in der allgemeinen Formel Kap. V. §. 20. $m = 90$, $q = 5$, und nach und nach anstatt r die Zahlen 1, 2, 3, 4 und 5; so giebt sie

für den ersten Fall: $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$,

— — 2ten — $\frac{5 \cdot 4}{90 \cdot 89} = \frac{2}{801} = \frac{1}{400{,}5}$,

— — 3ten — $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{90 \cdot 89 \cdot 88} = \frac{1}{11748}$,

— — 4ten — $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87} = \frac{1}{511038}$,

— — 5ten — $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} = \frac{1}{43949268}$, W.Z.F.*)

*) Man erhält also die Wahrscheinlichkeit, mit der
jeder gegebene einfache Auszug,
jede gegebene Ambe,

§. 2.*

Hat man n Nummern zu einfachen Auszügen besetzt, und sucht die Wahrscheinlichkeit wenigstens einen einfachen Auszug zu erhalten; so setze man in der allgemeinen Formel Kap. V. §. 18. $m=90$ und $q=5$, wodurch sie sich verwandelt in

$$1-\frac{(90-n)(89-n)(88-n)(87-n)(86-n)}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}$$

welches die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist; die man ebenfalls, nur unter einer andern Gestalt, aus angeführtem Kapitel §. 27. findet, wenn man die nur genannten Werthe für m und q, und $r=1$ setzt. So ist, wenn $n=2$ bedeutet, diese Wahrscheinlichkeit $1-\frac{85 \cdot 84}{90 \cdot 89}$ oder

$$\frac{5 \cdot 4}{90 \cdot 89} \cdot \left(1+2 \cdot \frac{85}{4}\right)=\frac{29}{267}.$$

§. 3.*

Hat man n Nummern zu Amben besetzt, und verlangt die Wahrscheinlichkeit zu wissen, wenigstens eine Ambe zu erhalten; so setze man in der allgemeinen Formel Kap. V. §. 27: $m=90$, $q=5$ und $r=2$, wodurch sie sich in folgende verwandelt:

$$\left\{\begin{array}{l}(n-4)(n-3)(n-2)\ + \\ 5 \cdot (90-n)(n-3)(n-2)\ + \\ 10\,(90-n)(89-n)(n-2)\ + \\ 10 \cdot (90-n)(89-n)(88-n)\end{array}\right\} \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86},$$

jede gegebene Terne,
— — — Quaterne,
— — — Quine
am Ziehungstage zu hoffen ist, wenn man die Menge der in fünf Nummern enthaltenen Combinationen von gegebener Art, durch die Menge ebenderselben in 90 Nummern enthaltenen dividirt.

Anm. des Uebers.

welches die geſuchte Wahrſcheinlichkeit iſt. Für $n=3$ bekömmt man $\frac{3 \cdot 2}{90 \ldots 86} \cdot \begin{bmatrix} 10.87.86.1+ \\ 10.87.86.85 \end{bmatrix}$ oder $\frac{43}{5874}$.

§. 4.*

Hat man n Nummern zu Ternen beſetzt, ſo bekömmt man die Wahrſcheinlichkeit, wenigſtens eine Terne zu erhalten, wenn man in der allgemeinen Formel Kap. V. §. 27, $m=90$, $q=5$ und $r=3$ ſetzt, $=$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{90 \ldots\ldots 86} \cdot \begin{bmatrix} (n-4)(n-3)+ \\ 5.(90-n)(n-3)+ \\ 10.(90-n)(89-n) \end{bmatrix}.$$

Hat man n Nummern zu Quaternen beſetzt, ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit, wenigſtens eine Quaterne zu erhalten (Kap. V. §. 27.)

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} \cdot (n-4+5(90-n)).$$

Sind endlich n Nummern zu Quinen beſetzt worden, ſo iſt die Wahrſcheinlichkeit eine Quine zu erhalten:

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86} \quad \text{(ebendaſelbſt §. 24)}.$$

§. 5.*

Wenn man auf Amben ſpielet, ſo muſs für jede einzelne, in der Anzahl von Nummern, die beſetzt werden, enthaltene Ambe, der Einſatz geſchehen. Iſt die Menge der gewählten Nummern $= n$; ſo iſt die Anzahl der darin enthaltenen Amben $= \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$. Und wenn jene $n+1$ geſetzt wird, ſo iſt dieſe $\frac{(n+1)n}{1 \cdot 2} = \frac{n^2+n}{1 \cdot 2} = \frac{n^2-n+2n}{1 \cdot 2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} + n$. Wenn demnach die Menge der in n Nummern enthaltenen Amben bekannt iſt; ſo

weiſs man auch die Menge derer, welche in der nächſt-höhern Anzahl enthalten ſind.

Die Menge der in n Nummern enthaltenen Ternen iſt $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$, und die Menge der in $n+1$ Nummern enthaltenen $= \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} = \frac{(n-2+3)n(n-1)}{1.2.3}$ $= \frac{n(n-1)(n-2)+3n(n-1)}{1.2.3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \frac{n(n-1)}{1.2}$; daſs ſich alſo aus jeder vorhergehenden Zahl die zunächſt folgende finden läſst. Nämlich um die Zahl der in $n+1$ Nummern enthaltenen Ternen zu bekommen, addirt man die Menge der in n Nummern enthaltenen Ternen zu der Menge der in eben ſo viel Nummern enthaltenen Amben.

Die Anzahl der in n Nummern enthaltenen Quaternen iſt $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}$, und die Anzahl der in $n+1$ Nummern enthaltenen $= \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} =$ $\frac{(n-3+4)n(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} +$ $\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}$.

Die Anzahl der in $n+1$ Nummern enthaltenen Quinen iſt:

$$\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4.5} = \frac{(n-4+5)n\ldots(n-3)}{1.2\ldots\ldots5} =$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} =$$

der Menge aller in n Nummern enthaltenen Quinen + der Menge aller in n Nummern enthaltenen Quaternen.

§. 6.*

Für einfache Auszüge ist, wenn man neunzig Nummern kauft, und der einfache Einsatz = *C* gesetzt wird, die gewisse Ausbeute 5. 15 *C* oder 75. *C*, hingegen der sämmtliche Einsatz des Spielers = 90. *C*; also ist der Gewinnst desselben = 75 *C* − 90 *C* = −15 *C*, welcher Ausdruk so viel sagen will, dass der Spielende in dem Falle nicht nur gar nichts gewinnet, sondern auch noch überdies funfzehnmal seinen Einsatz verlieret. Hieraus folget aber, dass das Lottospiel, wenn Nummern zu einfachen Auszügen besetzt werden, in dem Falle, wenn die Misse funfzehnmal ausgezahlt wird, ungerecht sein muss. Eben so wird bei Amben, für $n = 90$ der gewisse Verlust = 1305. *C* sein, woraus ebenfalls klar ist, dass das Spiel zu Amben, wenn eine Ambe den Einsatz 270 mal gewinnt, auch unrechtmässig ist. Und so lässt sich ferner die Unregelmässigkeit des Lottospiels auch bei den drei folgenden Spielarten zeigen.

§. 7.*

Wenn man eine gewisse Anzahl von Nummern, jede z. B. mit einem Rthlr. zu einfachen Auszügen besetzen will; so kann man fragen, wie viel Nummern man kaufen müsse, um bei einfachen Auszügen nichts gewinnen und nichts verlieren zu können? Diese Anzahl Nummern ist hier = 75, und heisst die Grenze des Einsatzes für einfache Auszüge. Kauft man also mehr als 75 Nummern; so ist gewisser Verlust vorhanden. Bei 75 Nummern übersteiget der Einsatz = 2775. *C* zu Amben, die höchst mögliche Ausbeute = 2750. *C*; bei 74 besetzten Nummern hingegen ist der Einsatz = 2701. *C*, um etwas geringer, als der grösst mögliche Gewinnst; dass also in dem Falle bei 75 Nummern der Verlust nothwendig und unvermeidlich, hingegen bei 74 Nummern noch etwas zu erbeuten möglich ist. Demnach fällt die Grenze des Einsatzes für Amben zwischen die Zahlen 74 und 75.

Auf

Auf eine ähnliche Art findet man die Grenze des Einſatzes für Ternen = 69; für Quaternen = 55; für Quinen = 28, wenn die Quine nur 100000 mal bezahlt wird.

Und ſo erhellet auch aus dieſer Unterſuchung die Unrechtmäſsigkeit des Lottoſpiels, weil es bei einem regelmäſsigen Lotto entweder gar keine Grenze des Einſatzes geben, oder dieſelbe bei allen fünf Spielarten = 90 ſein muſs.

§. 8.

Frage 7. *Wie vielmal ſollte rechtmäſsigerweiſe die Miſe dem Spieler von der Lotterie bezahlt werden, im Fall daſs ſeine Nummern (§. 1.) herauskommen?*

Auflösung. Setzt jemand 1 auf eine Begebenheit, deren Wahrſcheinlichkeit $= \frac{n}{m}$ iſt, ſo muſs, damit die Wette rechtmäſsig iſt, die Miſe desjenigen, welcher wider ihn das Gegentheil wettet $= \frac{m-n}{n}$ ſein (Kap. I. §. 18.). Bedeutet alſo 1 die Miſe, welche der Spieler in einem jeden der fünf genannten Fälle (§. 1.) in das Lotto ſetzet, und $\frac{n}{m}$ die Wahrſcheinlichkeit, daſs dieſe Nummern herauskommen werden: ſo wird $\frac{m-n}{n} + 1$ oder $\frac{m}{n}$ die Summe angeben, welche die Lotterie rechtmäſsigerweiſe auszahlen muſs, wenn alle dieſe beſetzten Nummern herausgezogen werden. Geſetzt alſo, daſs alle dieſe Nummern herauskommen; ſo muſs die Lotterie dem Spieler bei einfachen Auszügen, 18

Spieler bei einfachen Auszügen,	18		
— Amben,	$400 + \frac{1}{2}$		
— Ternen,	11748	mal ſeine	
— Quaternen,	511038		
— Quinen,	43949268		

Miſe 1 zurükbezahlen, wenn das Lotto regelmäſsig ſein ſoll. *W. Z. F.*

§. 9.*

Kauft jemand n Nummern, und ſetzt auf die Begebenheit, daſs wenigſtens eine davon herauskommt, nC: ſo läſst ſich die Formel für die Miſe x des Gegenſpielers durch folgende Proportion finden:

$$1 - \frac{(90-n)\ldots.(86-n)}{90\ldots..86} : \frac{(90-n)\ldots.(86-n)}{90\ldots..86} = nC : x.$$

Alſo wird, wenn wenigſtens eine von den beſetzten Nummern herauskommt, dem Spieler ausgezahlt:

$$nC + x = \frac{90\ldots..86 . nC}{90\ldots.86-(90-n)\ldots.(86-n)}.$$

§. 10.

Frage 8. *Wie groſs iſt der Vortheil, den die Lotterie vor dem Spieler in einem jeden von den fünf oben genannten Fällen (§. 1.) bei ihren feſtgeſetzten Bedingungen hat?*

Auflösung. Man ſubtrahire das Vielfache der Miſe, welches die Lotterie zurükbezahlt, wenn die Nummern herauskommen, von demjenigen, das ſie in dieſem Falle nach der oben geführten Rechnung (§. 8.) rechtmäſsigerweiſe auszahlen ſollte: ſo iſt der Ueberſchuſs der geſuchte Vortheil der Lotterie. Alſo bekömmt ſie bei einfachen Auszügen: $18-15=3$,

— Amben, $400+\frac{1}{2}-270=130+\frac{1}{2}$,

— Ternen, $11748-5200=6548$,

— Quaternen, $511038-70000=441038$,

— Quinen, $43949268-1000000=42949268$;

Hieraus erſiehet man, daſs die Kaſſe in einem jeden dieſer Fälle einen beſtimmten Theil von dem, was ſie rechtmäſsigerweiſe, wenn die Nummern gewinnen, auszahlen ſollte, für ſich behält; und zwar beträgt dieſes

bei einfachen Auszügen: $\frac{3}{18}$ oder $\frac{1}{6}$ des rechtmäſsigen Gewinnes,

— Amben, $\frac{130+\frac{1}{2}}{400+\frac{1}{2}}$ oder $\frac{29}{89} = \frac{1}{3\frac{2}{29}}$ — — —

— Ternen, $\frac{6548}{11748}$ oder $\frac{1637}{2937} = \frac{1}{1\frac{1300}{2937}}$ — — —

— Quaternen, $\frac{441038}{511038}$ oder $\frac{220519}{255519} = \frac{1}{1\frac{35000}{255519}}$ — —

— Quinen, $\frac{42949268}{43949268}$ oder $\frac{10737317}{10987317} = \frac{1}{1\frac{250000}{10987317}}$ —.

W. Z. F.

§. 11.*

Alſo iſt die gewöhnliche Einrichtung des Lotto numeriſch ungerecht, weil der Einleger nothwendig einen Verluſt leidet, wenn er die Grenze des Einſatzes überſchritten hat, welcher Verluſt deſto gröſser wird, je gröſser der Abzug iſt, den die Lottoherrn für ihre dabei gehabte Mühe anſetzen. Eben dieſe Unregelmäſsigkeit findet auch bei den beſtimmten Auszügen ſtatt, welche in dem nun folgenden §. 12. unterſucht werden ſollen.

§. 12.

Frage. 9. *Die Wahrſcheinlichkeit des Spielers und den Vortheil der Lotterie bei einem beſtimmten Auszuge und einer beſtimmten Ambe zu finden.*

Auflösung. Um die Wahrſcheinlichkeit zu erhalten, daſs [die einzelne Nummer / die zwei Nummern] welche zu

$\left\{\begin{matrix}\text{einem beſtimmten Auszuge}\\ \text{einer beſtimmten Ambe}\end{matrix}\right\}$ beſetzt worden, an der beſtimmten Stelle $\left\{\begin{matrix}\text{herauskommen wird}\\ \text{herauskommen werden}\end{matrix}\right\}$: ſetze man in der allgemeinen Formel des Kap. VI. §. 57. (oder kürzer in $\frac{1}{m \ldots (m-n+1)}$ ebendaſelbſt §. 45.) $m = 90$, $q = 5$, $n = r = \left\{\begin{matrix}1\\ 2\end{matrix}\right\}$: ſo verwandelt ſie ſich in

$$\left\{\begin{matrix}\frac{89 \ldots\ldots 86}{90 \ldots\ldots 86} = \frac{1}{90}\\ \frac{88 \ldots\ldots 86}{90 \ldots\ldots 86} = \frac{1}{90 \cdot 89} = \frac{1}{8010}\end{matrix}\right\}$$

welches die geſuchte Wahrſcheinlichkeit iſt.

Demnach müſste die Lotterie, wenn gewonnen wird, bei einem regelmäſsigem Spiele, dem Spieler $\left\{\begin{matrix}90\\ 8010\end{matrix}\right\}$ mal ſeine Miſe 1 zurükbezahlen. Alſo iſt der Vortheil der Lotterie in dieſem Falle

$$\left\{\begin{matrix}\frac{90-70}{90} = \frac{2}{9}\\ \frac{8010-4900}{8010} = \frac{311}{801}\end{matrix}\right\} \textit{W. Z. F.}$$

§. 13.*

Beſetzt man n Nummern, jede zu einem beſtimmten Auszuge; ſo bekömmt man die Wahrſcheinlichkeit wenigſtens einen beſtimmten Auszug zu erhalten, wenn man in der allgemeinen Formel Kap. VI. §. 58. $m = 90$, $q = 5$ und $r = 1$ ſetzt.

Kapitel X.

Geometrische Aufgaben.

§. 1.

Frage 10. *Auf einer horizontalen und quadratischen Ebene, A B E D, in welche ein Kreis H G F I beschrieben worden ist (Fig. 1.) lasse man eine Kugel frei herum laufen. Man fragt, wie groſs die Wahrscheinlichkeit ist, daſs die Kugel, wenn sie sich zu bewegen aufhört, in dem erwähnten Kreise anhalten wird?*

Auflösung. Es heiſse $\frac{n}{m}$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit: so ist

1. die Summe aller Punkte im Quadrate $ABED$, oder welches einerlei ist, der Flächeninnhalt dieses Quadrats, die Anzahl aller Fälle: folglich ist $m = AB^2$, und wenn r den Halbmesser CF des eingeschriebenen Kreises bedeutet, so hat man $m = 4r^2$.

2. Die Summe aller Punkte der Fläche des eingeschriebenen Kreises, oder welches einerlei ist, der Flächeninnhalt des eingeschriebenen Kreises, ist die Anzahl der Fälle, welche die Begebenheit geben, deren Wahrscheinlichkeit man sucht: also ist $n = \text{Umfang } HGFI . \frac{CF}{2}$; und wenn β die Verhältniſs des Kreisumfangs zum Durchmesser anzeigt, $1 : \beta = 2 . CF : \text{Umfang } HGFI$; folglich $\text{Umfang } HGFI = \beta . 2 . CF$; also $n = \beta . CF^2 = \beta . r^2$. Demnach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\frac{n}{m} = \frac{\beta r^2}{4r^2} = \frac{\beta}{4} = 0,7853981 \ldots\ldots W. Z. F.$$

Folglich ist diejenige Wahrscheinlichkeit, daſs die Kugel ausserhalb dem Kreise stille stehen wird,

$$= 1 - 0,7853981\ldots = 0,2146018 \ldots\ldots$$

§. 2.

FRAGE II. *Auf einer horizontalen und quadratischen Ebene, ABED (Fig. 2.) in welche ein ordentliches Achtek abcdefgh eingeschrieben worden ist, läſst man, ohne zu zielen, eine Kugel hinrollen, so lange bis sie stille stehet, und wiederholet solches viermal hinter einander. Was ist die Wahrscheinlichkeit, daſs die Kugel wenigstens einmal auſserhalb des regulairen Achteks stehen bleiben wird?*

AUFLÖSUNG. Wenn t die Seite des Quadrats, und u die Seite des regulairen Achteks bedeutet: so hat man $ah = \sqrt{(Aa^2 + Ah^2)}$; also ab oder $u = Aa.\sqrt{2}$, weil $Aa = Ah$. Es ist aber $AB = Aa + ab + bB = 2.Aa + ab$, weil $Aa = bB$; also $t = 2.Aa + u$; folglich $Aa = \frac{t-u}{2}$; also $u = \frac{t-u}{\sqrt{2}}$, oder $u.\sqrt{2} = t - u$; folglich $u = \frac{t}{\sqrt{2}+1}$.

Nun ist der Flächeninnhalt des Quadrats $ABED = t^2$; und der Flächeninnhalt des Achteks: Umfang $abcdefgh.\frac{CF}{2} = 8u.\frac{t}{4} = 2tu = \frac{2t^2}{\sqrt{2}+1}$. Also ist der Flächeninnhalt des Quadrats weniger dem Flächeninnhalte des regulairen Achteks:

$$t^2.\left(1 - \frac{2}{\sqrt{2}+1}\right) = t^2.\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1};$$

dieser Ausdruk würde in einem Versuche der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit sein, deren Nenner t^2 sein würde; folglich wäre in einem Versuche die gesuchte Wahrscheinlichkeit $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$; es sind aber nach der Annahme vier Versuche; folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit (Kap. VII. §. 5.):

$$1 - \left(1 - \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}\right)^4 = 1 - \frac{2^4}{(\sqrt{2}+1)^4} = \frac{(\sqrt{2}+1)^4 - 2^4}{(\sqrt{2}+1)^4} =$$

$$= \frac{4+8\sqrt{2}+12+4.\sqrt{2}+1-16}{4+8\sqrt{2}+12+4.\sqrt{2}+1} = \frac{1+12.\sqrt{2}}{17+12.\sqrt{2}}.$$

W. Z. F.

§. 3.

Frage 12. *Auf einer horizontalen Kreisebene AFBKDG (Fig. 3.) deren Durchmesser AK (= 2 r) ist, und in welche ein gleichseitiges Dreiek ABD, und ein Quadrat HFGI beschrieben worden sind, deren Grundlinien BD und HI gleichlaufend, und auf dem Durchmesser AK senkrecht sind; läſst man eine Kugel, bis ihre Bewegung aufhört, herumrollen, und wiederholet eben dieses achtmal hinter einander. Wie groſs wird die Wahrscheinlichkeit sein, daſs in diesen acht Versuchen die Kugel wenigstens einmal in dem Dreiek, und wenigstens einmal in dem Quadrate stille stehen wird?*

Auflösung. Wenn in einem Versuche, $\frac{n}{m}$ die Wahrscheinlichkeit bedeutet, daſs die Kugel in dem Dreiek, und $\frac{p}{m}$ die Wahrscheinlichkeit, daſs die Kugel in dem Quadrate stehen bleiben wird; φ die Anzahl der Fälle ist, welche die zwei Begebenheiten zugleich geben, so wird

$$\frac{m^8-(m-n)^8-(m-p)^8+(m-n-p+\varphi)^8}{m^8}$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit sein (Kap. VII. §. 56. und §. 59. VI.)

Es ist aber m der Flächeninnhalt des Kreises *AFBKDG*; n der Innhalt des Dreieks *ABD*; p die Oberfläche des Quadrats *HFGI*; und φ die Fläche des unordentlichen Sechseks $OQRTSP = n - BR.QR - ON.AN.$ Demnach hat man:

1) $m = \beta r^2$ (wo β die Verhältniſs des Kreisumfangs zum Durchmeſſer ausdrükt).

2) $n = BM \,.\, AM = \sqrt{(BK^2 - MK^2)} \,.\, AM$. Nun iſt $BK = r$; weil das Perpendikel CM nicht nur die Sehne BD, ſondern auch den dazu gehörigen Kreisbogen $BKD = \frac{1}{3}$ des Umfangs $AFBKDG$, in K halbirt, und alſo BK die Sehne des ſechſten Theiles des Kreisumfangs iſt. Ferner iſt $MK = \frac{1}{2} r$; denn in dem gleichſeitigen Dreiek CBK iſt BM ein Perpendikel aus der Spitze B auf die Grundlinie CK und halbirt folglich ſelbige. Endlich iſt $AM = AC + CM = r + \frac{1}{2} r = \frac{3r}{2}$. Demnach bekömmt man: $\sqrt{(BK^2 - MK^2)} \,.\, AM = \sqrt{\left(r^2 - \frac{r^2}{4}\right)} \,.\, \frac{3r}{2}$, oder $n = \frac{3\sqrt{3}}{4} \,.\, r^2$.

3) $KL \,.\, LA = HL^2$; alſo $KL \,.\, (LN + NA) = HL^2$, oder $KL \,.\, (HI + KL) = \frac{HI^2}{4}$, denn $LN = FH = HI$; $NA = KL$, weil die gleichen Sehnen FG, HI, vom Mittelpunkte des Kreiſes C gleich weit entfernt ſind. Alſo iſt $KL^2 = -HI \,.\, KL + \frac{HI^2}{4}$, und wenn man dieſe quadratiſche Gleichung auflöſt, ſo erhält man

$$KL = \frac{HI}{2} \,.\, (\sqrt{2} - 1) = \frac{\sqrt{p}}{2} (\sqrt{2} - 1).$$

Aber $KL = AK - LA = 2r - NL - AN = 2r - \sqrt{p} - KL$; alſo $2 \,.\, KL$ oder $\sqrt{p}\,(\sqrt{2} - 1)$ oder $\sqrt{2p} - \sqrt{p} = 2r - \sqrt{p}$; folglich $\sqrt{2p} = 2r$, und hieraus $p = 2r^2$.

4) $BR = MB - HL$; Nun ist $MB = \frac{1}{2} . BD = \frac{1}{2} . r\sqrt{3}$ *),
$HL = \frac{1}{2} . HI = \frac{1}{2} . \sqrt{p}$, folglich $MB - HL = \frac{\sqrt{3}}{2} . r - \frac{\sqrt{p}}{2}$
$= \frac{\sqrt{3}}{2} . r - \frac{r\sqrt{2}}{2}$ oder $BR = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} . r$.

Ferner $BR : QR = MB : AM$, das ist $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} . r : QR$
$= \frac{\sqrt{3}}{2} r : \frac{3r}{2}$ oder $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} . r : QR = 1 : \sqrt{3}$, folglich $QR =$
$\frac{3 - \sqrt{3} . \sqrt{2}}{2} . r$.

Also $BR . QR = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} r . \frac{3 - \sqrt{3} . \sqrt{2}}{2} r =$
$\frac{r^2 . \sqrt{3}}{4} . (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = \frac{r^2 \sqrt{3}}{4} . (5 - 2 . \sqrt{3} . \sqrt{2}) = \frac{5\sqrt{3} - 6\sqrt{2}}{4} . r^2$.

Auch ist AN oder $KL : ON = AM : BM$, das ist
$\frac{\sqrt{2} - 1}{2} \sqrt{p}$ oder $\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} . r : ON = \frac{3r}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} . r$, oder
$\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} . r : ON = \sqrt{3} : 1$, folglich $ON = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} . \sqrt{3}} . r$.

Demnach $ON . AN = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{\sqrt{2} . \sqrt{3} . \sqrt{2}} . r^2 =$
$\frac{3 - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} . r^2$.

*) Denn $BM^2 = BC^2 - CM^2 = r^2 - \frac{1}{4} r^2 = \frac{3r^2}{4}$, folglich
$BM = \frac{r\sqrt{3}}{2}$, und $2 . BM$ oder $BD = r . \sqrt{3}$.

Alſo iſt $\varphi = n - BR \,.\, QR - ON \,.\, AN = \frac{3\sqrt{3}}{4} \,.\, r^2 - \frac{5\sqrt{3} - 6\sqrt{2}}{4} \,.\, r^2 - \frac{3 - 2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \,.\, r^2$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{4} r^2 - \frac{5\sqrt{3}}{4} r^2 + \frac{6\sqrt{2}}{4} r^2 - \frac{3}{2\sqrt{3}} r^2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} r^2$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} r^2 + \frac{3}{\sqrt{2}} r^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} r^2 + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} r^2$$

$$= \left[\frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}\right] . \, r^2.$$

Folglich iſt die geſuchte Wahrſcheinlichkeit:

$$\frac{\beta^8 - \left[\beta - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]^8 - (\beta-2)^8 + \left[\beta - 2 - 7 \,.\, \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right]^8}{\beta^8}$$

W. Z. F.

§. 4.

Frage 13. *Ueber einer horizontalen Ebene, die in gleiche regulaire Felder eingetheilt iſt, werfe man einen Thaler in die Höhe. Wie groſs ſind die Wahrſcheinlichkeiten, daſs der Thaler auf ein einziges oder auf mehrere Felder zugleich fallen wird?*

Auflösung. Die Felder, welche vermöge der Annahme gleiche regulaire Vieleke ſind, ſind nothwendig entweder gleiche gleichſeitige Dreieke, oder gleiche Quadrate, oder gleiche regulaire Sechseke.

1) Die Wahrſcheinlichkeit zu finden, daſs der Thaler auf ein einziges Feld fallen wird: beſchreibe man in eins von den Feldern,

in das Dreiek *ABC*, Fig. 4.	eine ähnliche Figur	*abc*
in das Quadrat *ABCD*, Fig. 5.		*abcd*
in das Sechsek *ABCDEF*, Fig. 6.		*abcdef*

die von den Seiten des Feldes um die Länge *Gg* des Halbmeſſers des Thalers entfernt iſt: ſo iſt klar, daſs, wenn

der Mittelpunkt des Thalers auf die Oberfläche der eingeſchriebenen Figur fällt, der Thaler ganz und gar auf dieſes Feld fallen wird; und daſs, wenn der Mittelpunkt des Thalers auſſerhalb dieſes innern Polygons fällt, der Thaler wenigſtens zum Theil auſſerhalb des Feldes fallen wird. Folglich iſt der Flächeninnhalt

$$\left\{\begin{array}{l}\text{des Dreieks } ABC\\ \text{des Quadrats } ABCD\\ \text{des Sechseks } ABCDEF\end{array}\right\} \text{ die Anzahl aller Fälle;}$$

$$\text{und der Flächeninnhalt} \left\{\begin{array}{l}\text{des Dreieks } abc\\ \text{des Quadrats } abcd\\ \text{des Sechseks } abcdef\end{array}\right\} \text{ die An-}$$

zahl der Fälle, welche die Begebenheit geben, deren Wahrſcheinlichkeit geſucht wird. Alſo iſt die Wahrſcheinlichkeit P daſs der Thaler mit ſeinem ganzen Um-

$$\text{fange auf das} \left\{\begin{array}{l}\text{Dreiek}\\ \text{Quadrat}\\ \text{Sechsek}\end{array}\right\} \text{ fallen wird,} =$$

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\text{Fläche } abc}{\text{Fläche } ABC}\\[2ex] \dfrac{\text{Fläche } abcd}{\text{Fläche } ABCD}\\[2ex] \dfrac{\text{Fläche } abcdef}{\text{Fläche } ABCDEF}\end{array}\right\}$$

Wenn k die Seite des Feldes, r den Halbmeſſer des Thalers bedeutet, und O der Mittelpunkt des Polygons iſt: ſo hat man $\triangle\, ABC = \frac{k.BG}{2}$; aber $BG =$

$\sqrt{(AB^2 - AG^2)} = \frac{k.\sqrt{3}}{2}$; folglich $\triangle\, ABC = \frac{k^2.\sqrt{3}}{4}$.

Eben ſo iſt $\triangle\, abc = \frac{bc^2.\sqrt{3}}{4}$; aber $AB : bc = BG : bg$;

nun ist $BG = 3 \cdot OG$, und $bg = 3 \cdot Og$, folglich $AB : bc = OG : Og$, oder

$$AB : bc = \frac{BG}{3} : \left(\frac{BG}{3} - Gg\right), \text{ das ist}$$

$$k : bc = \frac{k.\sqrt{3}}{6} : \left(\frac{k.\sqrt{3}}{6} - r\right), \text{ also}$$

$$bc = \left(\frac{k.\sqrt{3}}{6} - r\right) . \frac{6}{\sqrt{3}} = k - 2r . \sqrt{3},$$

und $\triangle abc = \frac{(k - 2r.\sqrt{3})^2 . \sqrt{3}}{4}$.

Demnach ist für das Dreiek (Fig. 4.):

$$P = \frac{\triangle abc}{\triangle ABC} = \frac{(k - 2r.\sqrt{3})^2}{k^2} = \frac{k^2 - 4kr\sqrt{3} + 12r^2}{k^2}$$

In dem Quadrate (Fig. 5.) ist

$AB : OG = ab : Og$ oder $OG - Gg$, das ist

$$k : \frac{k}{2} = ab : \left(\frac{k}{2} - r\right), \text{ also}$$

$$ab = \left(\frac{k}{2} - r\right) . 2 = k - 2r.$$

Demnach ist für das Quadrat:

$$P = \frac{ab^2}{AB^2} = \frac{k^2 - 4kr + 4r^2}{k^2}.$$

In dem Sechsek (Fig. 6.) ist $OG^2 = AO^2 - AG^2 = AB^2 - \frac{1}{4} AB^2 = k^2 - \frac{1}{4} k^2 = \frac{3k^2}{4}$, also $OG = \frac{k}{2}\sqrt{3}$.

Ferner AO oder $AB : ao$ oder $ab = OG : Og$ oder $OG - Gg$, das ist $k : ab = \frac{k.\sqrt{3}}{2} : \left(\frac{k\sqrt{3}}{2} - r\right)$,

folglich $ab = \left(\frac{k\sqrt{3}}{2} - r\right) . \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{k\sqrt{3} - 2r}{\sqrt{3}}$.

Da nun *Fläche* $abcdef = 6 . \triangle aOf = 6 . \frac{ab . Og}{2} = 3 . ab . Og$; und eben so *Fläche* $ABCDEF = 3 . AB . OG$; so ist für das Sechsek:

$$P = \frac{ab . Og}{AB . OG} = \frac{\left(\frac{k . \sqrt{3} - 2r}{\sqrt{3}}\right) . \left(\frac{k\sqrt{3}}{2} - r\right)}{\frac{k^2 . \sqrt{3}}{2}}$$

$$= \left(\frac{k^2\sqrt{3}}{2} - kr - kr + \frac{2r^2}{\sqrt{3}}\right) . \frac{2}{k^2\sqrt{3}} = \frac{3k^2 - 4kr . \sqrt{3} + 4r^2}{3k^2}.$$

Setzt man $\frac{1}{2} = \left\{\begin{matrix} (k^2 - 4kr\sqrt{3} + 12r^2) : k^2 \\ (k^2 - 4kr + 4r^2) : k^2 \\ (3k^2 - 4kr\sqrt{3} + 4r^2) : 3k^2 \end{matrix}\right\}$; so bekömmt man $\frac{k}{r} = \left\{\begin{matrix} 2\sqrt{3} . (2 + \sqrt{2}) \\ 2 . (2 + \sqrt{2}) \\ \frac{2}{\sqrt{3}} . (2 + \sqrt{2}) \end{matrix}\right\}$. Dieses giebt für das Dreiek, Quadrat und Sechsek, die Verhältniss zwischen der Seite des Polygons und dem Halbmesser des Thalers, wenn bei gleichen Misen, die Wette, dass der Thaler ganz auf ein einziges Feld fallen wird, rechtmässig sein soll.

2) Die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, dass der Thaler auf zwei oder eine grössere Zahl Felder fallen wird; bemerke man, dass diese Begebenheit statt finden wird, wohin auch der Mittelpunkt des Thalers zwischen die Umfänge $\left\{\begin{matrix} ABC \text{ und } abc \\ ABCD \text{ und } abcd \\ ABCDEF \text{ und } abcdef \end{matrix}\right\}$ fallen

mag; alſo läſst ſich die Anzahl der Fälle, welche dieſe Begebenheit geben, durch den Innhalt der Flächen ausdrüken, welche dieſe Umfänge einſchlieſsen, das iſt,

$$\text{durch} \left[\begin{array}{ll} 3kr - 3\sqrt{3}\cdot r^2, & \text{in dem Dreiek,} \\ 4kr - 4r^2, & \text{in dem Quadrate,} \\ 6kr - 2\sqrt{3}\cdot r^2, & \text{in dem Sechsek} \end{array}\right]$$

Demnach erhält man

$$P = \left[\begin{array}{l} (4kr\cdot\sqrt{3} - 12\cdot r^2) : k^2 \\ (4kr - 4r^2) : k^2 \\ (4kr\cdot\sqrt{3} - 4r^2) : 3k^2 \end{array}\right] \text{ für das Drei-}$$

ek, Quadrat und Sechsek; und wenn man jede dieſer Wahrſcheinlichkeiten $\frac{1}{2}$ gleich ſetzet, ſo findet man

$$\text{wie vorher (in 1) } \frac{k}{r} = \left\{\begin{array}{c} 2\cdot\sqrt{3}\cdot(2+\sqrt{2}) \\ 2\cdot(2+\sqrt{2}) \\ \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot(2+\sqrt{2}) \end{array}\right\}.$$

3) Die Wahrſcheinlichkeit zu finden, daſs der Thaler wenigſtens auf drei Felder fallen wird, verlängere man aus jeder Winkelſpitze der eingeſchriebenen Figuren die Seiten dieſer Figuren, bis ſie in dem Umfange des Feldes eintreffen: ſo wird die Summe der Parallelogramme *AMam*, welche dadurch entſtehen, die Zahl der Punkte ſein, wo der Mittelpunkt des Thalers hinfallen muſs, damit der Thaler auf mehr als zwei Felder falle; alſo wird die Summe dieſer Parallelogramme, das iſt, $3\cdot Gg\cdot AM = 3\cdot r\cdot\frac{2r}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}\cdot r^2$ für das Dreiek; $4\cdot AM^2 = 4\cdot r^2$ für das Quadrat; $6\cdot Gg\cdot AM = 4\cdot\sqrt{3}\cdot r^2$ für das Sechsek, die Anzahl der Fälle ſein, welche die beſtimmte Begebenheit geben: und wenn man dieſe Gröſse durch den Flächeninnhalt des Feldes, der die Anzahl aller Fälle iſt, dividirt, ſo wird man die ge-

suchte Wahrscheinlichkeit erhalten: $\frac{2\sqrt{3}\,.\,r^2}{\frac{k^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{8\,r^2}{k^2}$ für das Dreiek; $\frac{4\,r^2}{k^2}$ für das Quadrat; $\frac{4\sqrt{3}\,.\,r^2}{3.\frac{k^2\sqrt{3}}{2}} = \frac{8\,r^2}{3\,k^2}$ für das Sechsek. Setzt man diese Wahrscheinlichkeiten, jede $= \frac{1}{2}$; so findet man $\frac{k}{r} = 4$, $2\sqrt{2}$, und $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

4) Die Wahrscheinlichkeit, daſs der Thaler nur auf zwei Felder fallen wird, wird gefunden, wenn man, in Erwägung, daſs solche Begebenheit alsdann statt findet, wenn der Mittelpunkt des Thalers zwischen die Umfänge des Feldes und der innern Figur, und auſserhalb der Parallelogramme *AMam* fällt, diese Flächenstüken durch den Flächeninnhalt des Feldes dividirt. So bekömmt man die gesuchte Wahrscheinlichkeit, bei dem Dreiek:

$$\frac{\triangle ABC - \triangle abc - 3\,.\,\text{Parallelogr.}\ AMam}{\triangle ABC} = \frac{4\sqrt{3}\,.\,kr - 20\,.\,r^2}{k^2};$$ bei dem Quadrate:

$$\frac{AB^2 - ab^2 - 4\,r^2}{AB^2} = \frac{4\,kr - 8\,r^2}{k^2};$$ und bei dem Sechsek:

$$\frac{3\,.\,AB\,.\,OG - 3\,.\,ab\,.\,Og - 4\sqrt{3}\,.\,r^2}{3\,.\,AB\,.\,OG} = \frac{4\,kr - 4\sqrt{3}\,.\,r^2}{\sqrt{3}\,.\,k^2}.$$ Setzt man diese Wahrscheinlichkeiten dem Bruche $\frac{1}{2}$ gleich; so ist für die rechtmäſsige

Wette zu gleichen Misen, $\frac{k}{r} = \frac{20}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ für das Dreiek; 4 für das Quadrat; und $\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (2+\sqrt{-2})$ für das Sechsek. Hieraus erhellet, dass, wenn die Felder reguläire Sechseke sind, wegen der unmöglichen Grösse $\sqrt{-2}$, keine rechtmässige Wette zu gleichen Misen möglich ist.

5) Um die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, dass der Thaler auf sechs dreiekigte oder auf vier quadratische oder auf drei sechsekigte Felder fallen wird: beschreibe man aus der Winkelspitze *C*, *D*, *F*, des Feldes, als einem Mittelpunkte, mit dem Halbmesser *Gg* des Thalers einen Kreis, welcher die Seiten des Feldes in den beiden Punkten *P* und *Q* schneidet: so werden die Ausschnitte

$$3 \cdot PCQ = \frac{\beta r^2}{2};\ 4 \cdot PDQ = \beta r^2;\ 6 \cdot PFQ = 2\beta r^2;$$

(wo β die Verhältniss des Kreisumfangs zum Durchmesser ist) die Anzahl der günstigen Fälle für das Dreiek, Quadrat und Sechsek ausdrüken. Also wird die gesuchte Wahrscheinlichkeit *P* sein

$$= \frac{2\beta r^2}{\sqrt{3} \cdot k^2} \text{ für das Dreiek;}$$

$$= \frac{\beta r^2}{k^2} \text{ für das Quadrat;}$$

$$= \frac{4\beta r^2}{3\sqrt{3} \cdot k^2} \text{ für das Sechsek; und } P = \frac{1}{2} \text{ gesetzt,}$$

erhält man $\frac{k}{r} = \frac{2\sqrt{\beta}}{\sqrt[4]{3}}$, $\sqrt{2\beta}$, und $\frac{2\sqrt{2\beta}}{\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt{3}}$.

6) Um die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, dass der Thaler nur auf drei Felder und zwei Fugen fallen wird: subtrahire man von den Parallelogrammen

3 . *AM*

3\. *AMam*, 4. *AMam*, 6. *AMam*, oder $2\sqrt{3}\,.\,r^2$, $4r^2$, $4\sqrt{3}.r^2$, die Kreisausſchnitte 3.*PCQ*, 4.*PDQ*, 6.*PFQ*, oder $\frac{\beta}{2}r^2$, βr^2, $2\beta.r^2$; ſo werden die Unterſchiede $\left(2\sqrt{3}-\frac{\beta}{2}\right).r^2$, $(4-\beta)\,r^2$, $2.(2.\sqrt{3}-\beta)\,r^2$, die Anzahl der günſtigen Fälle für das Dreiek, Quadrat und Sechsek angeben. Hieraus folgt $P = \frac{8.\sqrt{3}-2\beta}{\sqrt{3}}.\frac{r^2}{k^2}$, $(4-\beta)\,.\,\frac{r^2}{k^2}$, $\frac{8\sqrt{3}-4\beta}{3\sqrt{3}}\,.\,\frac{r^2}{k^2}$; und wenn man jeden dieſer Werthe von P, $= \frac{1}{2}$ ſetzt, ſo bekömmt man dadurch $\frac{k}{r} = \frac{2.\sqrt{(4\sqrt{3}-\beta)}}{\sqrt[4]{3}}$, $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{(4-\beta)}$, und $\frac{2\sqrt{2}.\sqrt{(2\sqrt{3}-\beta)}}{3^{\frac{3}{4}}}$.

Die Methode, welcher wir uns bei der Auflöſung dieſer 13ten Frage bedient haben, kann gebraucht werden, um die Wahrſcheinlichkeit von allen Lagen zu finden, welche der Thaler auf gleichen oder ungleichen irregulairen Feldern haben kann, dergleichen rechtwinklichte Dreieke, Rauten, rechtwinklichte oder ſchiefwinklichte Parallelogramme, u. ſ. f. ſind.

Uebrigens haben wir dieſe und die folgende Frage aus einer Abhandlung in den Werken des Herrn von Büffon entlehnt, welche zur Ueberſchrift hat: Verſuch einer moraliſchen Rechenkunſt (*Eſſai d'Arithmétique morale*).

§. 5.

Frage 14. *Ueber einem aus gleichen und parallelen Bretern zuſammengeſetzten Fuſsboden werfe man ein*

Stäbchen in die Höhe. Man sucht die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Stäbchen, nachdem es herabgefallen, eine von den parallelen Fugen des Bodens durchkreuzen wird.

Auflösung. Es sei *ABCD* (Fig. 7.) eins von den Bretern: man ziehe zwischen den parallelen Fugen *AB* und *CD*, zwei andere Parallelen *ab* und *cd*, so, dass eine jede derselben um die halbe Länge des Stäbchens von den ersten beiden entfernt ist.

1. So ist klar, dass, wenn die Mitte des Stäbchens in dem Raume *abcd* sich befindet, das Stäbchen, was es auch für eine Lage haben mag, weder *AB* noch *CD* schneiden kann.

2. Liegt die Mitte des Stäbchens in dem Raum *ABab*; so kann dasselbe, nachdem es zu liegen kommt, die Fuge *AB* schneiden oder nicht schneiden. Man ziehe eine Perpendikularlinie *HL* zwischen den beiden Linien *AB* und *ab* auf dieselben; beschreibe aus irgend einem Punkte *P* dieser Linie *HL*, als einem Mittelpunkte, mit der zum Halbmesser angenommenen halben Länge des Stäbchens, einen Kreis, der die Linie *AB* in den Punkten *G* und *g*, und die verlängerte *HL* in *M* schneidet: so läst sich, wenn die Mitte des Stäbchens auf den Punkt *P*, oder auf den unendlich kleinen Theil *Pp* fällt, die Anzahl der möglichen Lagen des Stäbchens, in welchen es *AB* schneidet, durch *Pp*. *Bog GMg* angeben, wie leicht einzusehen ist: und in jedem kleinen Theilchen *Pp* der Linie *LH*, wo die Mitte des Stäbchens hinfallen kann, läst sich die Anzahl der Lagen, in welchen das Stäbchen *AB* schneidet, durch das Produkt von *Pp* in den dazu gehörigen Bogen *GMg* ausdrüken. Wenn also *dx* und *y* die zusammengehörigen veränderlichen *Pp* und *GMg* bedeuten; so wird *ydx* die Anzahl der Lagen sein, wo das Stäbchen *AB* schneiden wird, so lange die Mitte desselben in einem unendlich kleinen Theilchen der Linie *LH* sich befinden wird.

Folglich ist die Anzahl der Lagen, wo das Stäbchen AB, da die Mitte desselben in der Linie LH ist, schneiden wird, $= \int y\,dx$; und weil es in dem Raume $ABab$ so viel Linien LH giebt, als Punkte in der Linie AB sind; so wird $AB.\int y\,dx$ die Anzahl der Lagen sein, wo das Stäbchen die AB schneidet, indem es mit seiner Mitte in dem Raume $ABab$ liegt.

3. Fällt die Mitte des Stäbchens in den Raum $CDcd$, so findet man eben so die Anzahl der Lagen, wo der Stab CD schneidet, $= CD.\int y\,dx$, oder $AB.\int y\,dx$. Folglich ist die Anzahl der Fälle, welche die bestimmte Begebenheit geben, $= 2.AB.\int y\,dx$.

4. Die Anzahl aller möglichen Lagen des Stäbchens auf dem Brete $ABCD$ ist offenbar $AB.AC.c$ (wo c denjenigen Kreisumfang bedeutet, dessen Durchmesser die Länge des Stäbchens ist). Demnach ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{2.AB.\int y\,dx}{AB.AC.c} = \frac{2.\int y\,dx}{AC.c}$.

Um den Flächeninnhalt, welcher durch $\int y\,dx$ angedeutet wird, zu erhalten, verzeichne man eine gemeine Radlinie $BDAdb$ (Fig. 8.), deren beschreibender Kreis die Länge des Stäbchens zum Durchmesser AE hat: durch die Mitte C der Linie AE ziehe man DCd mit der Grundlinie BEb der krummen Linie gleichlaufend, die von ihr in D und d geschnitten wird: aus ebendemselben Punkte C, zum Mittelpunkte angenommen, zeichne man den beschreibenden Kreis, welcher die Radlinie in ihrem Gipfel A, und die Grundlinie derselben in ihrer Mitte E berühret, und die gerade Linie Dd in den Punkten M und m schneidet.

Dem zu Folge ist die Fläche $MDAdm$, welche von der Radlinie, dem Kreise, und der Linie Dd begrenzt wird, $= \int y\,dx$: denn wenn man einen Punkt P irgendwo in der Linie $AC = LH$ annimmt; aus diesem

Punkte eine doppelte Ordinate RPR der Cycloide, der Grundlinie Bb gleichlaufend ziehet, welche den Kreis in Q und Q schneiden wird, ferner eine unendlich nahe doppelte Ordinate rpr ziehet, die den Kreis in q und q schneidet; so ist die kleine Fläche $RQqr = QR \cdot Pp$; aber vermöge der Natur der Cycloide ist jede gerade Linie QR dem Bogen QA des beschreibenden Kreises gleich *); folglich ist die kleine Fläche $RQqr = Pp \cdot AQ$; also $\int QRrq = \int Pp \cdot AQ$, oder welches einerlei ist, die Fläche $2 \cdot QARQ = \int QAQ \cdot Pp = \int y dx$; folglich ist die Fläche $MDAmd =$ der Funktion $\int y dx$, in welcher man $x = AC = LH$ setzt.

5.* Nun ist noch übrig, dafs man suche, $\int y dx$ in LH auszudrüken. Dieses kann folgendergestalt geschehen: Der Raum zwischen den Bogen AQ und AR und der geraden Linie RQ ist $= AQ \cdot (AP - AC) + QP \cdot AC$**), und verwandelt sich in $AC^2 = LH^2$ für $AP = AC = LH$. Folglich die Fläche $ADMA = LH^2$, und $2 \cdot ADMA = MDAmd = 2 \cdot LH^2 = \int y dx$. Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{2\int y dx}{AC \cdot c} = \frac{4 \cdot LH^2}{AC \cdot c} = \frac{2 \cdot LH}{AC \cdot \beta}$, wo β die Verhältnifs des Kreisumfangs zum Durchmesser anzeigt.

§. 6.

Wir wollen dieses Kapitel mit einer Frage beschliefsen, deren Auflösung uns in den Stand setzen wird, die gemeine Meinung zu prüfen, ob eine nicht vortheilhafte Wette durch die Menge der Versuche vortheilhaft werde; so, dafs jemand, der einmal eine solche Wette verloren, auf die Gefahr seines Glüks wiederum aufs neue mehrmal hinter einander zu wetten, wagen könne, damit er am Ende nicht nur alles, was er in allen vor-

*) *Käftners* Analysis endl. Gröfsen §. 607.

**) *Käftners* Analysis des Unendl. §. 559. VII.

hergehenden Verſuchen verloren, wieder gewinne, ſondern ſogar überdies noch dazu, was er ſogleich im erſten Verſuche erbeuten wollte.

§. 7.

FRAGE 15. *Paul ſetzt die Miſe 1 auf das Geſchehen einer Begebenheit, deren Wahrſcheinlichkeit* $\frac{n}{m}$ *iſt; und Peter auf das Nichtgeſchehen dieſer Begebenheit die Miſe F; unter folgenden Bedingungen:*

1) Wenn Paul beim erſten Verſuche die Wette verliert, ſo macht er einen zweiten Verſuch, und ſetzt die Miſe $\frac{F+1}{F}$ *gegen* $1+F$ *auf ebendieſelbe Begebenheit;*

2) Verliert Paul wiederum aufs zweitemal die Wette, ſo ſetzet er zum drittenmal $\left(\frac{F+1}{F}\right)^2$ *gegen* $1+\frac{F+1}{F}+F$ *oder* $\frac{(F+1)^2}{F}$ *auf die vorige Begebenheit;*

3) Verliert Paul noch einmal, ſo ſetzt er wiederum aufs neue, um einen vierten Verſuch zu unternehmen, $\left(\frac{F+1}{F}\right)^3$ *gegen* $1+\frac{F+1}{F}+\left(\frac{F+1}{F}\right)^2+F$ *oder* $\frac{(F+1)^3}{F^2}$ *auf ebendieſe Begebenheit;*

4) Verliert Paul zum viertenmale, ſo wird die Wette nach ebendemſelben Geſetze wiederholt; und ſo wird ferner fortgefahren bis zum xten Verſuche.

Gewinnt Paul vor oder bei dem xten Verſuche, ſo wird ihm als Gewinnſt die Summe F zu Theil (oder es werden ihm alle ſeine Miſen nebſt der Summe F, die er anfangs im erſten Verſuche gewinnen wollte, ausgezahlt);

und verliert er in allen x Versuchen, so wird Petern die Summe der Misen des Paul ausgezahlt, das ist:

$$1 + \frac{F+1}{F} + \left(\frac{F+1}{F}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{F+1}{F}\right)^{x-1},$$

oder $\frac{(F+1)^x - F^x}{F^{x-1}}$.

Man fragt, ob die Bedingungen, unter welchen Paul solchergestalt die Wette x mal hinter einander zu erneuern die Erlaubniss hat, diese Wette mehr oder weniger vortheilhaft, als sie in einem Versuche gewesen sein würde, für ihn machen werden.

Auflösung. 1) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Begebenheit, auf welche Paul setzet, in x Versuchen sich ereignen wird, ist $1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)^x$ (Kap. VII. §. 5.).

2) Die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich nicht ereignen wird, ist $\left(1 - \frac{n}{m}\right)^x$ (ebendas. §. 3.).

3) Die Summe, welche Paul verlieret, wenn sie sich nicht ereignet, ist $\frac{(F+1)^x - F^x}{F^{x-1}}$.

4) Die Summe, welche Paul gewinnet, wenn sie sich ereignet, ist F. Also ist das, was er gewinnen sollte, wenn die Begebenheit, auf welche er setzet, geschiehet, das vierte Glied y folgender Proportion:

$$1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)^x : \left(1 - \frac{n}{m}\right)^x = \frac{(F+1)^x - F^x}{F^{x-1}} : y =$$

$$\frac{\left((F+1)^x - F^x\right) \cdot \left(1 - \frac{n}{m}\right)^x}{F^{x-1} - F^{x-1}\left(1 - \frac{n}{m}\right)^x} \quad \text{(Kap. I. §. 18.).}$$

Hieraus ersiehet man, daſs der Vortheil des Paul in dieser Wette (wenn einer vorhanden iſt) die Verhältniſs des Ueberschuſses desjenigen iſt, was er bekömmt, über das was er, im Fall er gewinnet, rechtmäſsig erhalten soll, zu dem was er rechtmäſsig erhalten soll; oder der Ueberschuſs der Summe F über y, dividirt durch y; das iſt

$$\frac{F-y}{y}=\frac{F-\dfrac{((F+1)^x-F^x)\left(1-\frac{n}{m}\right)^x}{F^{x-1}-F^{x-1}.\left(1-\frac{n}{m}\right)^x}}{\dfrac{((F+1)^x-F^x)\left(1-\frac{n}{m}\right)^x}{F^{x-1}-F^{x-1}.\left(1-\frac{n}{m}\right)^x}}=$$

$$\frac{F^x-F^x\left(1-\frac{n}{m}\right)^x-(F+1)^x\left(1-\frac{n}{m}\right)^x+F^x\left(1-\frac{n}{m}\right)^x}{((F+1)^x-F^x).\left(1-\frac{n}{m}\right)^x}=$$

$$\frac{F^x-(F+1)^x.\left(1-\frac{n}{m}\right)^x}{((F+1)^x-F^x).\left(1-\frac{n}{m}\right)^x}.$$

Allein dieser Vortheil iſt bejaht, o oder verneint, je nachdem

$$F^x \gtreqless (F+1)^x\left(1-\frac{n}{m}\right)^x, \text{ oder } F \gtreqless (F+1)\left(1-\frac{n}{m}\right),$$

$$\text{oder } Fm \gtreqless Fm+m-Fn-n, \text{ oder } Fn \gtreqless m-n;$$

oder endlich nachdem $F \gtreqless \frac{m-n}{n}$ iſt.

Folglich beſtimmt die Verhältniſs von F zu $\frac{m-n}{n}$, welche den Vortheil, die Rechtmäſsigkeit, oder den Nachtheil der Wette in einem einzigen Verſuche beſtimmt, eben dieſe Dinge noch in x Verſuchen: mit dieſem Unterſchiede, daſs die Wette, wenn ſie bei einem Verſuche rechtmäſsig iſt, rechtmäſsig bleibt, wie groſs auch die Anzahl der Verſuche ſein mag; da im Gegentheil, wenn die Wette für einen der Wettenden vortheilhaft oder nachtheilig iſt, dieſer Vortheil oder Nachtheil in einer gegebenen Zahl x von Verſuchen, nach einer Funktion von F, $\frac{m}{n}$, und x zunimmt.

Ohngeachtet alſo die Wahrſcheinlichkeit des Wettenden bei der Vielfachheit der Verſuche zunimmt; ſo ſiehet man, daſs, wenn beim erſten Verſuche die Wette für ihn nachtheilig iſt, ſie es noch vielmehr bei den folgenden Verſuchen wird: weil ſeine Miſen in einer gröſsern Verhältniſs als die Wahrſcheinlichkeiten der Begebenheit, die ihn gewinnen laſſen kann, zunehmen.

Kapitel XI.

Berechnung der Wahrſcheinlichkeiten durch Erfahrungen oder Beobachtungen.

§. 1.

Die Begebenheiten oder Sätze, deren Wahrſcheinlichkeiten durch eine genaue Analyſe zu berechnen möglich iſt, ſind ſehr klein an der Zahl und von einer geringen Wichtigkeit, wenn man ſie mit denjenigen in Vergleichung ſtellet, wo man weder eine Anzahl aller

gleich möglichen Fälle angeben, noch die Anzahl derjenigen darunter, welche für die Begebenheiten ſind, beſtimmen kann. Bei dieſem Mangel kann man ſeine Zuflucht zu Beobachtungen und Erfahrungen nehmen, die zwar eine nicht ganz richtige, aber doch der Richtigkeit ſehr nahe kommende Wahrſcheinlichkeit an die Hand geben werden. In der That, es beſtätiget auch die Erfahrung, daſs bei einer Menge von Wiederholungen einer und ebenderſelben Handlung, ebenderſelben Bewegung, oder ebendeſſelben Zuſtandes die Anzahl des Wiederkommens einer jeden der davon abhängenden Begebenheiten ohngefähr der Wahrſcheinlichkeit ſolcher Begebenheit allemal proportionirt iſt. Zum Beiſpiel. Bei einer Menge von Würfen mit zwei gemeinen Spielwürfeln kann man ohngefähr fünf einfache Würfe auf einen Paſch rechnen, jede Seite wird ohngefähr eben ſo vielmal als jede andere zum Vorſchein kommen, welches auch von jedem Paſche, und den übrigen Begebenheiten gilt. Macht man alſo die Anzahl aller Verſuche zum Nenner, und ſetzt in den Zähler diejenige Zahl, welche anzeigt, wie vielmal eine Begebenheit in dieſen Verſuchen ſich zugetragen hat, ſo bekömmt man einen Bruch, welcher der wahren und richtigen Wahrſcheinlichkeit dieſer Begebenheit ſich nähern wird.

Dieſe jetzt erwähnte Methode wollen wir in gegenwärtigem Kapitel näher auseinanderſetzen. Sie iſt nicht blos auf die Erfahrung, noch auf ein wüſtes Raiſonnement gegründet, ſondern eines ſtrengen Beweiſes fähig, wie man aus den folgenden Sätzen erſehen wird.

§. 2.

Lehrsatz. *Wenn die Handlung oder Bewegung, wovon eine beſtimmte Begebenheit abhängt, eine gewiſſe Anzahl x von malen wiederholet wird, und die Wahrſcheinlichkeit dieſer Begebenheit $\frac{n}{m}$ iſt; ſo giebt die ganze Zahl,*

welche zwischen den beiden Brüchen $(x+1) \cdot \frac{n}{m}$ *und* $(x+1) \cdot \frac{n}{m} - 1$ *sich befindet, an, wie vielmal diese Begebenheit auf das wahrscheinlichste in der gegebenen Menge von Versuchen sich ereignen wird; und wenn diese zwei Brüche sich auf ganze Zahlen bringen lassen, so zeigt eine jede dieser Zahlen, wie vielmal die bestimmte Begebenheit auf das wahrscheinlichste sich zutragen wird.*

Beweis. Wir haben gesehen (Kap. VII. §. 32.), daſs, wenn $\frac{n}{m}$ die Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit bedeutet, die Wahrscheinlichkeit, daſs diese Begebenheit just r mal in x Versuchen sich ereignen wird, $\frac{x \ldots\ldots (x-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r} \cdot \frac{n^r}{m^x} (m-n)^{x-r}$ ist; folglich ist der Werth von r in dem Falle, wo die veränderliche Funktion $\frac{x \ldots (x-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots r} \cdot \frac{n^r}{m^x} \cdot (m-n)^{x-r}$ ein Gröſstes oder Maximum ist, diejenige Zahl, welche anzeigt, wie vielmal, weder mehr noch weniger, diese Begebenheit auf das wahrscheinlichste in den angenommenen x Versuchen sich ereignen wird. Setzt man also in dieser veränderlichen Funktion nach und nach anstatt r alle ganze Zahlen von o bis x; so wird diese Funktion bei jeder Substitution immer gröſser werden, bis auf ein gewisses Glied, von da sie wieder abnehmen wird; und es ist offenbar, daſs das Glied, wo diese Gröſse aus der Vermehrung in die Verminderung übergehen wird, zugleich dasjenige ist, wo seine unmittelbar darauf folgenden Werthe einander gleich sind, und wo folglich sein Werth der gröſst mögliche ist.

Dieses vorausgesetzt, substituire man in $\frac{x \ldots\ldots (x-r+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots r} \cdot \frac{n^r}{m^x} \cdot (m-n)^{x-r}$, für r die

Gröſsen $(x+1)\cdot\frac{n}{m}$ und $(x+1)\cdot\frac{n}{m}-1$; ſo wird daraus

$$P = \frac{x\,.\,.\,.\,.\,.\,(x-(x+1)\,.\,\frac{n}{m}+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(x+1)\,.\,\frac{n}{m}} \times$$

$$\frac{n^{(x+1)\,.\,\frac{n}{m}}}{m^x}\,.\,(m-n)^{x-(x+1)\,.\,\frac{n}{m}},$$

$$P^1 = \frac{x\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(x-(x+1)\,.\,\frac{n}{m}+2)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,.\,((x+1)\,.\,\frac{n}{m}-1)} \times$$

$$\frac{n^{(x+1)\,.\,\frac{n}{m}-1}}{m^x}\,.\,(m-n)^{x-(x+1)\,.\,\frac{n}{m}+1};$$

alſo iſt

$$P = P^1\,.\,\frac{x-(x+1)\,.\,\frac{n}{m}+1}{(x+1)\,.\,\frac{n}{m}}\,.\,\frac{n}{m-n},$$

aber $\frac{x-(x+1)\,.\,\frac{n}{m}+1}{(x+1)\,.\,\frac{n}{m}}\,.\,\frac{n}{m-n} = 1,$

denn $(x-(x+1)\,.\,\frac{n}{m}+1)\,.\,n = (x+1)\,.\,\frac{n}{m}\,.\,(m-n),$ wie man ſich leicht davon überzeugen kann. Alſo $P^1 = P$. Folglich iſt die Funktion

$$\frac{x \ldots (x-r+1)}{1 \cdot 2 \ldots r} \cdot \frac{n^r}{m^x} \cdot (m-n)^{x-r}$$

ein Maximum, wenn $r = (x+1) \cdot \frac{n}{m}$ oder $(x+1) \cdot \frac{n}{m} - 1$, oder wenn diese beiden Werthe von r Brüche sind, so ist die zwischen ihnen liegende ganze Zahl das gesuchte Maximum. *W. Z. E.*

§. 3.

Zusatz. Wenn $x \cdot \frac{n}{m}$ eine ganze Zahl ist, so sind $x \cdot \frac{n}{m} + \frac{n}{m}$, und $x \cdot \frac{n}{m} + \frac{n}{m} - 1$, oder $(x+1) \cdot \frac{n}{m}$, und $(x+1) \cdot \frac{n}{m} - 1$ Brüche, und $x \cdot \frac{n}{m}$ ist die einzige ganze Zahl zwischen diesen zwei Brüchen; folglich zeigt sie, wie vielmal die bestimmte Begebenheit auf das wahrscheinlichste sich ereignen wird.

§. 4.

Anmerkung. Wenn man in der Grösse

$$\frac{x \ldots\ldots\ldots (x-r+1)}{1 \cdot 2 \ldots\ldots r} \cdot \frac{n^r}{m^x} \cdot (m-n)^{x-r}$$

nach und nach für r alle ganze Zahlen von 0 bis x substituirt, und $x \cdot \frac{n}{m}$ eine ganze Zahl ist; so ist nicht nur der Werth jener Grösse durch die Substitution der Zahl $x \cdot \frac{n}{m}$ für r, ein Maximum geworden; sondern die Werthe, welche eben diese Grösse, durch die Substitution von $x \cdot \frac{n}{m} \pm 1$ anstatt r, erlangt, sind die nächst grössten, die Werthe, welche eben diese Grösse durch

die Subſtitution von $x . \frac{n}{m} \pm 2$ für r, erhält, ſind die gröſsten nach dieſen letztern, und ſo weiter; dergeſtalt, daſs die Wahrſcheinlichkeit, die beſtimmte Begebenheit in x Verſuchen eine Anzahl mal, die ſich der von $x . \frac{n}{m}$ nähert, zu erhalten, faſt der Gewiſsheit gleich gilt.

§. 5.

Um dieſe Anmerkung durch Beiſpiele ſinnlich zu machen, ſetze man

1) $\frac{n}{m} = \frac{3}{5}$, und $x = 10$; ſo verwandelt ſich die Funktion $\frac{x \ldots . (x-r+1)}{1 . 2 \ldots . . r} . \frac{n^r}{m^x} . (m - n)^{x-r}$ in

$$\frac{10 \ldots . (11 - r)}{1 . 2 \ldots . . r} . \frac{3^r}{5^{10}} . 2^{10-r};$$

ſetzt man nun in dieſem letzten Ausdruk nach und nach anſtatt r, die Zahlen

$$\left\{\begin{array}{l} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array}\right. ; \text{ ſo bekömmt man } \left\{\begin{array}{r} 204+\frac{4}{5} \\ 3072 \\ 20736 \\ 82944 \\ 217728 \\ 391910+\frac{2}{5} \\ 489888 \\ 419904 \\ 236196 \\ 78732 \\ 11809+\frac{4}{5} \end{array}\right\} : 1953125;$$

Demnach iſt die Wahrſcheinlichkeit die beſtimmte Begebenheit $x . \frac{n}{m}$ oder $x . \frac{n}{m} \pm 1$ oder $x . \frac{n}{m} \pm 2$ mal

zu erhalten =

$$\left\{\begin{matrix} 217728 + \\ 391910 + \frac{2}{5} + \\ 489888 + \\ 419904 + \\ 236196 \end{matrix}\right\} : 1953125 = \frac{1755626 + \frac{2}{5}}{1953125};$$

welche Wahrſcheinlichkeit wenig von der Gewiſsheit verſchieden iſt.

2) Man ſetze, daſs $\frac{n}{m} = \frac{3}{5}$, und $x = 9$, ſo verwandelt ſich der allgemeine Ausdruk $\frac{x....(x-r+1)}{1.2....r} \cdot \frac{n^r}{m^x} \times (m-n)^{x-r}$ in $\frac{9.....(10-r)}{1.2....r} \cdot \frac{3^r}{5^9} \cdot 2^{9-r}$, welcher ſich, wenn man für r nach und nach die Zahlen

$$\left\{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}\right. \text{ ſchreibt in } \left\{\begin{matrix} 512 \\ 6912 \\ 41472 \\ 145152 \\ 326592 \\ 489888 \\ 489888 \\ 314928 \\ 118098 \\ 19683 \end{matrix}\right\} : 1953125 \text{ verwandelt.}$$

Alſo iſt die Wahrſcheinlichkeit die beſtimmte Begebenheit eine Anzahl von malen zu erhalten, die von $x \cdot \frac{n}{m}$ nur um eine Gröſse, kleiner als 2, unterſchieden iſt, =

$$\left\{\begin{matrix} 326592 + \\ 489888 + \\ 489888 + \\ 314928 \end{matrix}\right\} : 1953125 = \frac{1621296}{1953125},$$

welche wenig von der Einheit oder Gewiſsheit abweichet.

3) Wenn $\frac{n}{m} = \frac{2}{3}$, und $x = 10$; ſo wird der allgemeine Ausdruk $\frac{10 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (11 - r)}{1 \, . \, 2 \, . \, . \, . \, . \, r} \cdot \frac{2^r}{3^{10}}$; ſetzt man in demſelben für r

$$\left\{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}\right\} ; \text{ ſo erhält man } \left\{\begin{matrix} 1 \\ 20 \\ 180 \\ 960 \\ 3360 \\ 8064 \\ 13440 \\ 15360 \\ 11520 \\ 5120 \\ 1024 \end{matrix}\right\} : 59049;$$

alſo iſt die Wahrſcheinlichkeit die beſtimmte Begebenheit in zehn Verſuchen eine Zahl von malen, die nur um 1 von $x \cdot \frac{n}{m}$ verſchieden iſt, zu erhalten,

$$\left[\begin{matrix} 13440 + \\ 15360 + \\ 11520 \end{matrix}\right] : 59049 = \frac{40320}{59049},$$

welche wenig von der Einheit verſchieden iſt: und die Wahrſcheinlichkeit dieſe Begebenheit eine Zahl von malen zu erhalten, die nur um 2 von $x \cdot \frac{n}{m}$ verſchieden iſt, $= \left[\begin{matrix} 8064 + \\ 40320 + \\ 5120 \end{matrix}\right] : 59049 = \frac{53504}{59049}$, welche noch weniger von der Einheit unterſchieden iſt.

4) Für $\frac{n}{m} = \frac{1}{1000}$, und $x = 2$; ist die Wahrscheinlichkeit, die bestimmte Begebenheit in den beiden Versuchen $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ mal hervorzubringen, $= \begin{bmatrix} 998001 \\ 1998 \\ 1 \end{bmatrix} : 1000000$; hieraus siehet man, dass die Wahrscheinlichkeit, dass sich die Begebenheit in den beiden Versuchen gar nicht ereignen wird, $= \frac{998001}{1000000}$ ist, welche der Gewissheit sehr nahe kommt; weil in diesem Falle 0 die ganze Zahl zwischen den Brüchen $(x+1) \cdot \frac{n}{m}$, $\frac{3}{1000}$, und $(x+1) \cdot \frac{n}{m} - 1$, $- \frac{997}{1000}$ ist.

§. 6.

Zusatz 1. Wenn die Handlung, Bewegung, oder der Zustand, von welchen eine bezeichnete Begebenheit abhängt, x mal wiederholet wird; so ist es beinahe gewiss, dass diese Begebenheit sich eine Anzahl von malen r ereignen wird, die so beschaffen ist, dass der Bruch $\frac{r}{x}$ der eigentlichen Wahrscheinlichkeit $\frac{n}{m}$ eben dieser Begebenheit sehr nahe kommen wird: denn wenn man $\frac{r}{x} = \frac{n}{m}$ setzt, so folgt daraus $r = x \cdot \frac{n}{m}$.

§. 7.

Zusatz 2. Wenn man nicht weiss, und keine Mittel ausfindig machen kann, die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Begebenheit mit Genauigkeit auszumachen, so wird man, zu Folge der oben festgesetzten Principien, aus Erfahrungen oder Beobachtungen diese Wahrscheinlichkeit durch die Näherung beinahe richtig erhal-

erhalten können. Zu dieser Absicht wiederhole oder beobachte man, so vielmal als es nur möglich ist oder bequem gehen will, die Handlung, Bewegung, oder den Zustand, wovon diese Begebenheit abhänget: ist alsdann x die Anzahl dieser Erfahrungen oder Beobachtungen, und giebt r an, wie vielmal diese Begebenheit geschehen ist; so wird man den Bruch $\frac{r}{x}$ für die gesuchte Wahrscheinlichkeit annehmen können.

Zum Beispiel. Wenn Peter und Paul 300 Parthien Schach mit einander gespielt haben, und Peter 136 davon gewonnen hat; so wird man $\frac{136}{300}$ oder $\frac{34}{75}$ für die Wahrscheinlichkeit annehmen können, dass Peter die erste Parthie Schach, welche er mit Paul spielen wird, gewinnen werde; und man kann ziemlich versichert sein, dass diese Wahrscheinlichkeit sich nicht beträchtlich von der wahren entfernen wird.

§. 8.

Die Anwendung dieser Methode erfodert zwei wesentliche Vorsichtsregeln, die eine betrift die Zahl, die andere die Beschaffenheit der Erfahrungen oder Beobachtungen, woraus man die verlangte Wahrscheinlichkeit herleiten will.

§. 9.

1) Ist die Anzahl dieser Erfahrungen sehr klein, und hat keine derselben die Begebenheit, deren Wahrscheinlichkeit man suchet, gegeben; so ist es nicht nur eigentlich unerlaubt daraus zu schliessen, dass diese Begebenheit unmöglich sei; sondern man ist auch nicht einmal versichert, dass sie nicht einen gewissen Grad von Wahrscheinlichkeit habe. Wenn im Gegentheil diese Begebenheit in allen Versuchen erfolgt ist; so fehlt so viel, dass man sollte nach der Strenge daraus schliessen können, die Be-

gebenheit werde nothwendig ſich ereignen, daſs man vielmehr nicht einmal verſichert iſt, ob ihre Wahrſcheinlichkeit nur ſehr groſs ſei.

2) Iſt aber die Menge der Erfahrungen ſehr groſs, ſo wird man mit vielem Schein der Wahrheit hieraus ſchlieſsen können; im erſten Falle, daſs die Begebenheit, von welcher die Rede iſt, obgleich nicht ſchlechterdings unmöglich, doch wenigſtens ſehr wenig wahrſcheinlich iſt; und in dem zweiten Falle, daſs dieſe Begebenheit, wo nicht im ſtrengſten Verſtande gewiſs, doch wenigſtens die Wahrſcheinlichkeit derſelben ſehr groſs iſt.

§. 10.

Es darf keinen uns bekannten und merklichen Unterſchied unter den verſchiedenen Bewegungen, Vorfällen oder Zuſtänden die verglichen werden, und demjenigen dieſer genannten Dinge geben, von welchen die Begebenheit abhängt, wovon man die Wahrſcheinlichkeit ſucht, die uns berechtigt einen Erfolg eher als einen andern zu erwarten.

Zum Beiſpiel. Wenn man durch die Methode, auf welche es hier ankommt, die Wahrſcheinlichkeit ſuchen will, mit zwei gemeinen Spielwürfeln, die man in der Hand hat, ſechs und ſechs zu werfen; ſo mache man die diesfalls nöthigen Verſuche entweder mit eben dieſen oder mit andern Würfeln, die von dieſen keine uns an ihnen bewuſste Verſchiedenheit haben; dergleichen ſolche wären, die dazu gemacht ſind, daſs man mit ihnen eine Seite öfter als eine andere von der nämlichen Wahrſcheinlichkeit werfen muſs. Desgleichen, wenn von 3000 achtzigjährigen mir bekannt geweſenen Perſonen nur 60 hundert Jahr alt geworden ſind; ſo läſst ſich, nach der vor uns habenden Methode der Bruch $\frac{60}{3000}$ oder $\frac{1}{50}$ für die Wahrſcheinlichkeit annehmen, daſs eine unbekannte achtzigjährige Perſon 100 Jahr alt

werden wird. Sucht man aber die Wahrscheinlichkeit, dass Peter, der achtzig Jahr alt ist, hundert Jahr leben wird, und weiss überdies, dass er schwach, und von einer gefährlichen Krankheit befallen ist; so muss man aus seinen Beobachtungen diejenigen, welche über gesunde und starke achtzigjährige Greise gemacht worden sind, herauswerfen, und seine Rechnung blos auf diejenigen einschränken, die über Alte von ebendemselben Alter und ohngefähr von den bekannten Gesundheitsumständen des Peter angestellt worden sind; hiedurch wird die Wahrscheinlichkeit, dass Peter hundert Jahr leben wird, vielleicht o oder beinahe o werden.

§. 11.

Aus den beiden vorhergehenden Sätzen folgt, dass die gegenwärtige Methode um so mehr Hofnung giebt, der wahren Wahrscheinlichkeit, die man zu wissen verlangt, nahe zu kommen, je mehr die Beobachtungen oder Erfahrungen, aus welchen man sie ableitet, vervielfacht; und je ähnlicher die Vorfälle, Bewegungen oder Zustände von Dingen, über die sie gemacht worden, demjenigen dieser genannten Dinge sind, wovon die Begebenheit abhängt, deren Wahrscheinlichkeit man sucht.

§. 12.

Wenn während den Versuchen, wodurch man die Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit herleiten will, bemerkt worden wäre, dass die Zahl des Wiederkommens dieser Begebenheit fortschreitend zu- oder abgenommen hätte; so müsste man bei dieser successiven Veränderung eine Ursache voraussetzen, auf welche so viel als möglich in der Findung der Wahrscheinlichkeit Rüksicht zu nehmen wäre; welches sich denn ohngefähr auf folgende Weise würde thun lassen: Man theile die gemachten Erfahrungen in mehrere auf einander folgende Epochen, deren jede dieselbe Zahl von Versuchen enthält; setze voraus, dass die Ursache der beobachteten

Veränderung, nicht in dem Laufe der Epochen, sondern nur in dem Uebergange einer Epoche zur andern ihre Wirkung äufsere; mache nach der gegenwärtigen Methode die Wahrscheinlichkeit der Begebenheit für jede Epoche; so werden diese Wahrscheinlichkeiten unter sich eine Reihe von Brüchen ausmachen, die einerlei Nenner haben, und deren Zähler eine Reihe von Zahlen sein werden, die entweder regulair oder irregulair sein wird. Um diese Reihe, wenn sie irregulair ist, in eine regulaire zu verwandeln, so mache man damit die nöthigen, aber geringst möglichen Veränderungen. Ist nun auf solche Weise diese Reihe regulair gemacht worden, so vermehre man sie um ein Glied; nehme dieses Glied zum Zähler, und den gemeinschaftlichen Nenner zum Nenner an. So wird der auf diese Weise erhaltene Bruch mit einiger Zuversicht, dafs man sich der Sache auf eine der Vernunft gemäfse Art genähert habe, für die gesuchte Wahrscheinlichkeit angenommen werden können.

Zum Beispiel. Peter hat mit Paul 408 Parthien Triktrak gespielt, während welchen beide ungleich vollkommen im Spiele waren; nun hat Peter in den 68 ersten Parthien 12; in den 68 folgenden, 15; in den 68 folgenden, 19; in den 68 folgenden, 26; in den 68 folgenden, 24; und endlich in den 68 letzten Parthien, 31 gewonnen. So war die Wahrscheinlichkeit des Peter zu gewinnen, in der ersten Epoche $\frac{12}{68}$; in der zweiten $\frac{15}{68}$; in der dritten $\frac{19}{68}$; in der vierten $\frac{26}{68}$; in der fünften $\frac{24}{68}$; und endlich in der sechsten $\frac{31}{68}$.

In der Reihe der Zähler: 12, 15, 19, 26, 24, 31, substituire man die Glieder 24 und 28, anstatt 26 und 24, so wird die Reihe: 12, 15, 19, 24, 28, 31, oder regu-

lair, wo die Unterſchiede der Glieder unter ſich die Reihe 3, 4, 5, 4, 3 formiren. Nun nehme man für das 7te, 8te, 9te, 10te Glied u. ſ. f. die Zahlen 33, 34, 34, 33, u. ſ. f. ſo erhält man eine ordentliche Reihe, in welcher die Differenzen der Glieder die Reihe 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 0, – 1, u. ſ. f. ſind, und man kann $\frac{33}{68}$, $\frac{34}{68}$, $\frac{34}{68}$ für die Wahrſcheinlichkeiten annehmen, daſs Peter in der ſiebenten, achten und neunten Epoche gewinnen werde.

§. 13.

Der Weg der Erfahrungen und Beobachtungen kann die Wahrſcheinlichkeiten der Begebenheiten aller Arten, ſelbſt derjenigen zu finden, gebraucht werden, deren Wahrſcheinlichkeit ſich eigentlich a priori berechnen lieſse. Ohne Zweifel wird es ſich ſehr oft ereignen, daſs die ſolchergeſtalt gefundene Wahrſcheinlichkeit um viel von der eigentlichen Wahrſcheinlichkeit, die durch die Analyſe erhalten wird, verſchieden iſt. Allein man muſs in Erwägung ziehen, daſs in den Rechnungen die Werkzeuge, womit man eine Begebenheit hervorbringt, vollkommen, das iſt, gleich fähig vorausgeſetzt werden, alle die Fälle, welche man durch Zählung herausbringt, hervorzubringen; welches in der Ausübung nicht ſtatt finden kann, wo die Unvollkommenheit der Werkzeuge gewöhnlicherweiſe viel Einfluſs auf die Begebenheit hat. Da alſo bei der vor uns habenden Methode die Unvollkommenheiten der Inſtrumente, womit die Begebenheit hervorgebracht wird, wirklich Einfluſs auf die bemerkten Reſultate gehabt haben; ſo ſchätzen die Beobachtungen, aus welchen man die Wahrſcheinlichkeiten herleitet, dieſe Unvollkommenheiten des Calculs auf eine der Vernunft gemäſse Art: dergeſtalt, daſs es nichts unmögliches iſt, und man zuweilen mit Grund vermuthen kann, daſs die auf dem Wege der Erfahrungen erhaltene Wahr-

scheinlichkeit, der gesuchten mehr, als diejenige sich nähert, welche man durch eine strenge Analyse gefunden.

Damit dieses durch ein Beispiel sinnlich werde, setze man, dass zwei gemeine Spielwürfel vollkommen kubisch, und in dem ganzen Umfange ihrer Solidität von einer gleich dichten Materie sind; werden diese beiden Würfel auf einen horizontalen Tisch geworfen, so ist es in der Theorie gewiss, dass es 36 gleich mögliche Resultate giebt. Allein, wenn sich bei diesen Würfeln einige physische Unregelmäsigkeiten befinden; zum Beispiel, wenn einer von ihnen von einer dichtern und folglich schwerern Materie gegen eine Seite als gegen die fünf übrigen ist; so wird dieser Würfel (wenn sonst alles übrige gleich ist) öfter auf diese Seite als auf die übrigen fallen; und folglich die dieser entgegengesetzte Seite öfter als irgend eine von den fünf andern geben. Die Methode a priori wird also alsdann unsicher, und man kann ihr die Methode der Erfahrungen vorziehen.

In dieser Absicht werfe man eine hinreichende Anzahl von malen diese beiden Würfel auf einen Tisch, zum Beispiel 144 mal; und wenn in diesen 144 Versuchen der Pasch von zwei Sechsen zwölfmal, ferner 5 und 4 nur sechsmal fällt; so nimmt man $\frac{12}{144}$ oder $\frac{1}{12}$ für die Wahrscheinlichkeit mit diesen zwei Würfeln einen Pasch von zwei Sechsen zu werfen, und $\frac{6}{144}$ oder $\frac{1}{24}$ für die Wahrscheinlichkeit 5 und 4 hervorzubringen; und man wird sich vielleicht mehr dem wahren Werthe dieser Wahrscheinlichkeiten nähern, als wenn man sie $\frac{1}{36}$ und $\frac{1}{18}$ annähme; weil sehr zu vermuthen ist, dass in einer grossen Anzahl von Versuchen das öftere Wiederkommen einer jeden möglichen Begebenheit, ohngefähr

der wirklichen Wahrſcheinlichkeit dieſer Begebenheit proportional iſt.

Nach dieſer Methode die Wahrſcheinlichkeiten anzugeben, begiebt es ſich ſo oft, daſs unglükliche Spieler Würfel, Karten, Spielbecher, Plätze wechſeln, und mit gutem Erfolg verſchiedene andere Mittel gebrauchen, die Werkzeuge des Glüks zu verändern, da ihnen die Erfahrung den Nachtheil kennen gelehrt hat, der für ſie aus der Unvollkommenheit dieſer Werkzeuge entſpringet.

§. 14.

Man kann durch den Weg der Erfahrungen die ſich nähernde Wahrſcheinlichkeit verſchiedener Ereigniſſe finden, welche ſtatt finden können, nicht nur bei den eigentlich ſo genannten Hazardſpielen, ſondern auch bei den vermiſchten Spielen, wo Glük und Geſchiklichkeit im Spielen gemeinſchaftlich mehr oder weniger zur Beſtimmung der Ereigniſs beitragen können; dergleichen das Triktrak, Billard, Ballſpiel und die meiſten Karten-ſogenannten Geſellſchaftsſpiele ſind; und endlich bei denjenigen Spielen, wo die Geſchiklichkeit allein entſcheidet, wie Schach und andere.

§. 15.

Man kann auch durch dieſe Methode, mittelſt einer hinreichenden Zahl gut gewählter Erfahrungen oder Beobachtungen, die Wahrſcheinlichkeit verſchiedener Naturbegebenheiten finden, davon die Gelegenheitsurſachen unbekannt ſind, und welche keiner bekannten periodiſchen Wiederkehr, wodurch die Ereignung derſelben gewiſs wird, unterworfen ſind.

§. 16.

Beispiele. Die Wahrſcheinlichkeit zu finden, daſs eine Perſon, die gegenwärtig im nten Jahre ihres Alters iſt, $n+p$ Jahre alt werden wird; nehme man aus den Sterberegiſtern der Stadt, und wenn es möglich

ist, des Landes, worin sie wohnet, die Anzahl der Verstorbenen nach einem Alter von n Jahren, und mache diese Zahl zum Nenner der gesuchten Wahrscheinlichkeit; hierauf nehme man die Anzahl derjenigen Personen, welche nach einem Alter von $n+p$ Jahren gestorben sind, und mache diese Zahl zum Zähler dieser Wahrscheinlichkeit.

Hiedurch kann man in einem Lande, wo man die Sterberegister von einer ziemlich langen Zeit her, und mit hinlänglicher Genauigkeit verfertigt, aufzuweisen hat, allezeit die Wahrscheinlichkeit finden, dass eine Person, deren Alter bekannt ist, 1, 2, 3, oder eine grössere Anzahl von Jahren darüber leben werde; und auf welche Erreichung von Jahren dieser Person man bei gleichen Misen rechtmässig wetten könne. Nach einer Folge ähnlicher Beobachtungen wird man für einen jeden Ort Wahrscheinlichkeitstafeln des menschlichen Lebens für jedes Alter verfertigen können, dergleichen man in den Werken des Herrn von Büffon antrift. *)

Eben so ist keinem Zweifel unterworfen, dass man nicht durch eine genugsam lange Folge von Witterungsbeobachtungen, für jedes Land und jede Jahreszeit, die Wahrscheinlichkeiten der verschiedenen Temperaturen der Luft, die man vermuthen darf, finden, und vielleicht endlich einförmige Gesetze und periodisches Wiederkommen bei diesen Abwechselungen, nach einer grossen Anzahl von Jahren, entdeken sollte, wodurch man die Ordnung von diesen Revolutionen festsetzen, und dieselben mit Gewissheit voraussehen könnte.

§. 17.

Man kann ferner durch diese Methode der Beobachtungen und Erfahrungen die Wahrscheinlichkeit der mo-

*) Von den deutschen Werken gehören hieher: *Süssmilchs* göttliche Ordnung; *Florencourt* Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst; und vorzüglich *Tetens* Einleitung zur Berechnung der Leibrenten u. s. w. *Anm. d. Uebers.*

ralischen Wirkungen, welche aus der Vergleichung von Willenshandlungen, und folglich von Urtheilen und Neigungen der Menschen bei gegebenen Umständen entspringen, ohngefähr bestimmen, es möge nun das Resultat aus den bekannten Eigenschaften eines einzelnen Menschen, oder den bekannten Eigenschaften mehrerer über eine Sache vereinigter oder getheilter Menschen, wahrscheinlich anzugeben verlangt werden.

§. 18.

Wollte man, zum Beispiel, die Wahrscheinlichkeit eines von jemanden bei einem gegebenen Umstande abgelegten Zeugnisses finden; so würde man alle bestätigten Zeugnisse, welche von eben dieser Person, oder von andern, die ohngefähr ebendasselbe Interesse und dieselben Einsichten hatten, und ohngefähr in ähnlichen Umständen abgelegt worden sind, mit einander vergleichen; die Zahl der verglichenen Zeugnisse würde der Nenner, und die Zahl der als wahr erkannten Zeugnisse der Zähler der gesuchten Wahrscheinlichkeit sein.

§. 19.

Und da sich durch diese Methode, weder die Wahrscheinlichkeit, noch die Gewissheit, mit geometrischer Genauigkeit, sondern blos mit der starken Hofnung, daß man sich ihnen auf eine der Vernunft gemäße Weise genähert habe, bestimmen lassen; so kann man sie, um sie von der geometrischen Wahrscheinlichkeit und Gewissheit zu unterscheiden, *physische* nennen, wenn die Frage von natürlichen Begebenheiten ist, bei deren Bestimmung der Wille des Menschen auf keine Weise Antheil hat; und *moralische*, wenn die Frage von Begebenheiten ist, welche aus Handlungen des menschlichen Willens entspringen.

§. 20.

Endlich können die Beobachtungen und Erfahrungen dienen, die Wahrscheinlichkeit von Behauptungen

oder allgemeinen und besondern Sätzen, so wie von Meinungen und Systemen zu finden, durch die Vergleichung der Thatsachen, welche sie zu bekräftigen, mit denjenigen, welche ihnen zu widersprechen scheinen. Und man darf die Hofnung nicht aufgeben, dass beim Mangel von Gewissheiten, welche vielleicht nie das Antheil der Menschen sein werden, eine hinreichende Zahl von Erfahrungen und Beobachtungen, verbunden mit dem scharfsinnigen Gebrauche, den das Genie davon zu machen gewust, nicht dereinst den grösten Theil der zweifelhaften Gegenstände der menschlichen Kenntnisse, einer allgemeinen Kritik und einzigen Art von Prüfung unterwerfen sollte, die für jede Meinung einen gleichförmigen, dem Grade der ihr beigelegten Wahrscheinlichkeit proportionirten Grad des Beifalls festsetzte.

Kapitel XII.

Von dem Einfluss der Zeugnisse auf die Wahrscheinlichkeiten.

§. 1.

Es giebt eine dritte Art die Wahrscheinlichkeit der Begebenheiten oder Sätze zu finden, welche im gemeinen Leben sehr im Gebrauch ist, das ist, sie aus dem Werthe der Zeugnisse herzuleiten, durch welche diese Begebenheiten bejaht oder verneint werden. Es richtet sich aber die Stärke der Zeugnisse nicht blos nach der Menge der Zeugen, sondern auch nach der Rechtschaffenheit und den Einsichten des Zeugen: dergestalt, dass die Grösse oder der Werth dieser moralischen Eigenschaften gleich mit in der Rechnung ausgedrükt werden muss, wenn man mit einiger Genauigkeit den Grad der Wahrscheinlichkeit angeben will, welcher aus einer Zu-

ſammenkunft von Zeugniſſen entſpringt. Wir wollen verſuchen, kürzlich einige von denjenigen Grundſätzen anzuzeigen, die uns geſchikt geſchienen haben, die Grundlage dieſer Theorie ausmachen zu können, welche wir nicht gegen alle Einwendungen zu vertheidigen auf uns nehmen möchten, und deren Anwendung oft mislich ſcheinen kann.

§. 2.

Die Erfahrung kann allein uns in den Stand ſetzen, die Stärke der Einſichten und der Rechtſchaffenheit eines Zeugen, der eine Thatſache bejaht oder verneint, gehörig zu würdigen. Dem zu Folge kann die Wahrſcheinlichkeit der Wahrhaftigkeit eines bei einem gegebenen Umſtande abgelegten Zeugniſſes nicht leicht anders hergeleitet werden, als aus der angeſtellten Vergleichung einer groſsen Zahl von Zeugniſſen, die von ebendemſelben Zeugen, oder andern von ohngefähr ebendenſelben Leidenſchaften, Vorurtheilen, Gewohnheiten, Intereſſe und Einſichten, und bei ohngefähr ähnlichen Umſtänden gegeben worden ſind, wie wir bereits im vorhergehenden (Kap. XI. §. 18.) erinnert haben. Geſetzt alſo, daſs unter einer Menge a dieſer Beobachtungen, das Zeugniſs b mal als wahr, und in allen übrigen als falſch erkannt worden iſt; ſo läſst ſich durch $\frac{b}{a}$ der Werth des Zeugniſſes, das heiſst, die Wahrſcheinlichkeit, daſs das Zeugniſs wahr iſt, ausdrüken.

§. 3.

Man nennet *Gewicht* oder *Werth*, oder *Stärke* eines Zeugniſſes, die Gröſse ſeines Einfluſſes in die Wahrſcheinlichkeit der That, welche es behauptet; eben ſo iſt das Gewicht mehrerer vereinigter Zeugniſſe der Einfluſs dieſer Vereinigung in die Wahrſcheinlichkeit der Begebenheit, welche durch alle dieſe Zeugniſſe behauptet wird.

§. 4.

Das Gewicht eines Zeugnisses, welches eine Thatsache bejahet, ist der Wahrscheinlichkeit dieses Zeugnisses proportional, und kann allezeit durch diese Wahrscheinlichkeit ausgedrükt werden. Wenn zum Beispiel der Bruch $\frac{b}{a}$ die Wahrscheinlichkeit des Zeugnisses ist, so wird $\frac{b}{a}$ das Gewicht ebendesselben Zeugnisses ausdrüken.

§. 5.

Ein Zeugniss heisst *unverwerflich*, wenn das Gewicht desselben das grösst mögliche ist; das heisst, dessen Wahrscheinlichkeit 1 ist. Man kann auch sagen, dass dasjenige Zeugniss unverwerflich sei, das am fähigsten ist, die Begebenheit, welche es behauptet, gewiss zu machen, vorausgesetzt dass diese Begebenheit übrigens nicht für unmöglich erkannt, und diesem Zeugnisse durch kein anderes Zeugniss widersprochen worden ist.

§. 6.

Wenn zwei Zeugnisse behaupten, dass eine gewisse That geschehen sei, so ist das Gewicht, welches aus diesen zwei vereinigten Zeugnissen entspringt, so gross als das Gewicht des ersten Zeugnisses, wenn man noch einen dem Gewichte des zweiten proportionalen Theil desjenigen, was dem ersten zu einem unverwerflichen Zeugnisse noch fehlet, hinzu addirt; oder das zweite Zeugniss vergrössert in dem Falle das Gewicht des ersten um einen solchen Theil seiner Ergänzung zur Einheit, der durch das Gewicht des zweiten Zeugnisses ausgedrükt wird. Wenn also $\frac{b}{a}$ das Gewicht des ersten Zeugnisses, und $\frac{d}{c}$ das Gewicht des zweiten ist;

so wird das Gewicht der beiden vereinigten Zeugnisse sein $\frac{b}{a}+\left(1-\frac{b}{a}\right).\frac{d}{c}$ oder $\frac{d}{c}+\left(1-\frac{d}{c}\right).\frac{b}{a}$.

§. 7.

Wenn drei Zeugnisse eine That bejahen, so wird das Gewicht der zwei übrigen vereinigten Zeugnisse um denjenigen Theil seiner Ergänzung zur Einheit durch das Gewicht des dritten noch hinzugekommenen Zeugnisses vergrösert, der durch das Gewicht des dritten Zeugnisses angedeutet wird. Sind z. B. die Gewichte der drei Zeugnisse $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$, $\frac{g}{f}$, so ist das Gewicht der drei vereinigten Zeugnisse

$$\frac{b}{a}+\left(1-\frac{b}{a}\right).\frac{d}{c}+\left(1-\frac{b}{a}-\left(1-\frac{b}{a}\right).\frac{d}{c}\right).\frac{g}{f};$$

und so weiter. Ueberhaupt:

Ein neu hinzugekommenes Zeugnis, welches eine Thatsache behauptet, vergrösert das Gewicht aller übrigen vereinigten Zeugnisse um einen solchen Theil seiner Ergänzung zur Einheit, der durch das Gewicht des neuen Zeugnisses ausgedrükt wird.

Wenn also A das Gewicht der übrigen vereinigten Zeugnisse, und $\frac{q}{p}$ das Gewicht des neuen hinzugekommenen Zeugnisses bedeutet; so wird das Gewicht aller Zeugnisse zusammengenommen, $A+(1-A).\frac{q}{p}$ sein.

§. 8.

Verneinen mehrere Zeugnisse eine Thatsache, so wächst auf eben die Art, durch jedes neu hinzugekommene Zeugnis, das Gewicht der übrigen in der Wahr-

scheinlichkeit, dass diese Begebenheit nicht existirt, vereinigten Zeugnisse um denjenigen Theil von dem, was diesem Gewichte zur Einheit mangelt, der durch das Gewicht des neuen Zeugnisses ausgedrükt wird. So ist, wenn B das Gewicht aller übrigen verneinenden Zeugnisse, und $\frac{y}{x}$ das Gewicht des zuletzt hinzugekommenen Zeugnisses anzeigt; das Gewicht aller in der Wahrscheinlichkeit, dass die Begebenheit nicht existiret, vereinigter Zeugnisse, $B + (1 - B) . \frac{y}{x}$.

§. 9.

Wenn eins von den bejahenden Zeugnissen unverwerflich ist, so können die übrigen seinem Gewichte nichts hinzusetzen, da es das gröſste Gewicht ist, das eine Menge vereinigter Zeugnisse haben kann; eben so, wenn eins der verneinenden Zeugnisse unverwerflich ist, können die übrigen verneinenden Zeugnisse seinem Gewichte, in der Wahrscheinlichkeit, dass die verneinte Sache nicht existire, nichts hinzusetzen, weil dieses Gewicht das gröſst mögliche ist.

§. 10.

Aus eben dem Grunde wird, wenn eins von den bejahenden Zeugnissen von keinem Gewichte; das heiſst, wenn seine Wahrscheinlichkeit o ist; dasselbe nichts zu dem Gewichte der affirmirenden Zeugnisse; und eins von den verneinenden Zeugnissen, dessen Gewicht o ist, nichts dem Gewichte der übrigen verneinenden Zeugnisse hinzufügen.

§. 11.

Wenn mehrere Zeugnisse eine Thatsache bejahen, und andere Zeugnisse ebendieselbe verneinen, so ist das aus der Vereinigung dieser widersprechenden Zeugnisse

entſpringende Gewicht, ſo groſs als der Ueberſchuſs des Gewichts der bejahenden Zeugniſſe über das Gewicht der verneinenden Zeugniſſe; oder der Ueberſchuſs des Gewichts der verneinenden Zeugniſſe über das Gewicht der bejahenden Zeugniſſe. Heiſst alſo A das Gewicht der bejahenden Zeugniſſe, B das Gewicht der verneinenden Zeugniſſe, ſo iſt das Gewicht, das aus allen dieſen auf beiden Seiten vorhandenen Zeugniſſen entſpringet, $A-B$, oder $B-A$, oder 0, je nachdem $A>B$, oder $A<B$, oder $A=B$.

§. 12.

Wenn das Gewicht der Zeugniſſe, welche eine Thatſache bejahen, gröſser iſt als das Gewicht der Zeugniſſe, welche ebendieſelbe leugnen; ſo vergröſsert der Ueberſchuſs des erſten Gewichts über das zweite, oder welches einerlei iſt, das Gewicht, welches aus allen Zeugniſſen für und wider die Sache entſpringet, die Wahrſcheinlichkeit der Exiſtenz der Sache. Hingegen, wenn das Gewicht der verneinenden Zeugniſſe das Gewicht der bejahenden Zeugniſſe überſteiget; ſo vermehret das Gewicht, welches aus den Zeugniſſen für und wider entſpringet, die Wahrſcheinlichkeit der Nichtexiſtenz der bezeugten Begebenheit. Endlich, wenn das Gewicht der bejahenden Zeugniſſe dem Gewichte der verneinenden Zeugniſſe gleich iſt; ſo iſt die Thatſache auf ihre eigenthümliche Wahrſcheinlichkeit, das iſt, auf diejenige gebracht, welche ihr unabhängig von den Zeugniſſen beigelegt werden kann.

§. 13.

Wenn eine bezeugte Begebenheit einen Grad von Wahrſcheinlichkeit hat, der ihr durch bloſse Schlüſſe, oder durch die Erfahrung, unabhängig von Zeugniſſen, beigelegt worden; ſo vergröſsern die abgelegten Zeugniſſe für oder wider dieſe Begebenheit, ihre eigenthümliche Wahrſcheinlichkeit

um denjenigen Theil von dem, was ihr zur Gewissheit noch mangelt, welcher durch den Ueberschuss des Gewichts der bejahenden Zeugnisse über das Gewicht der verneinenden Zeugnisse ausgedrükt wird.

§. 14.

LEHRSATZ. I. *Wenn mehrere Zeugnisse, deren Wahrscheinlichkeiten* $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$, $\frac{g}{f}$, $\frac{i}{h}$, *u. s. f. sind, eine Sache behaupten; so ist das Gewicht dieser vereinigten Zeugnisse so gross als die Einheit weniger das Produkt der Grössen* $1-\frac{b}{a}$, $1-\frac{d}{c}$, $1-\frac{g}{f}$, $1-\frac{i}{h}$, *u. s. f. das ist,* $1-\left[1-\frac{b}{a}\right].\left[1-\frac{d}{c}\right].\left[1-\frac{g}{f}\right].\left[1-\frac{i}{h}\right]\ldots\ldots$

BEWEIS. Das Gewicht des ersten Zeugnisses ist $\frac{b}{a}$ (§. 4.) $= 1 - \left[1-\frac{b}{a}\right]$.

Das Gewicht der beiden ersten Zeugnisse ist $\frac{b}{a}+\left[1-\frac{b}{a}\right].\frac{d}{c}$ (§. 6.) $= 1 - \left[1-\frac{b}{a}\right] + \left[1-\frac{b}{a}\right].\frac{d}{c} = 1-\left[1-\frac{b}{a}\right].\left[1-\frac{d}{c}\right]$.

Das Gewicht der drei ersten Zeugnisse ist $\frac{b}{a} + \left[1-\frac{b}{a}\right].\frac{d}{c}+\left[1-\frac{b}{a}-\left[1-\frac{b}{a}\right].\frac{d}{c}\right].\frac{g}{f}$ (§. 7.) $= 1-\left[1-\frac{b}{a}\right].\left[1-\frac{d}{c}\right]+\left[1-\frac{b}{a}\right]\left[1-\frac{d}{c}\right]\frac{g}{f}$ $= 1-\left[1-\frac{b}{a}\right].\left[1-\frac{d}{c}\right].\left[1-\frac{g}{f}\right]$; und so weiter. Folglich, u. s. w. *W. Z. E.*

§. 15.

Zusatz 1. Wenn mehrere Zeugniſſe, deren Wahrſcheinlichkeiten $\frac{q}{p}$, $\frac{s}{r}$, $\frac{u}{t}$ u ſ. f. ſind, eine Begebenheit verneinen; ſo iſt das Gewicht aller dieſer Zeugniſſe zuſammen, wodurch dieſe Begebenheit verneint wird, $1 - \left[1 - \frac{q}{p}\right] \cdot \left[1 - \frac{s}{r}\right] \cdot \left[1 - \frac{u}{t}\right] \ldots\ldots$

§. 16.

Zusatz 2. Wenn mehrere Zeugniſſe, deren Wahrſcheinlichkeiten $\frac{b}{a}$, $\frac{d}{c}$, $\frac{g}{f}$, u. ſ. f. ſind, eine Thatſache bejahen, und mehrere andere Zeugniſſe, deren Wahrſcheinlichkeiten $\frac{q}{p}$, $\frac{s}{r}$, $\frac{u}{t}$, u. ſ. f. ſind, ebendieſelbe Sache verneinen; ſo wird, wenn A das Produkt $\left[1 - \frac{b}{a}\right] \cdot \left[1 - \frac{d}{c}\right] \cdot \left[1 - \frac{g}{f}\right] \ldots\ldots\ldots$; und B, das Produkt $\left[1 - \frac{q}{p}\right] \cdot \left[1 - \frac{s}{r}\right] \cdot \left[1 - \frac{u}{t}\right] \ldots\ldots$ bedeutet, das Gewicht dieſer einander widerſprechenden Zeugniſſe, $1 - A - 1 + B$, oder $B - A$ ſein, wenn $B > A$; und dieſes Gewicht wird die eigenthümliche Wahrſcheinlichkeit der Begebenheit vermehren. Hingegen wird das Gewicht dieſer Zeugniſſe $1 - B - 1 + A$, oder $A - B$ ſein, wenn $B < A$ iſt, und dieſes Gewicht wird die Wahrſcheinlichkeit der Nichtexiſtenz der Begebenheit vergröſsern. Endlich wenn $A = B$, ſo wird das Gewicht der Zeugniſſe Null ſein, und die eigenthümliche Wahrſcheinlichkeit der Begebenheit weder vermehren noch vermindern können. (§. 11.).

§. 17.

Anmerkung. Aus den in den drei vorhergehenden Sätzen gefundenen Formeln erſiehet man: 1) daſs der Bruch, welcher durch $\left\{\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right.$ vorgeſtellet wird, um ſo viel kleiner, und folglich das Gewicht der $\left\{\begin{matrix}\text{bejahenden}\\\text{verneinenden}\end{matrix}\right.$ Zeugniſſe um ſo viel gröſser wird, je gröſser die Wahrſcheinlichkeit oder das Gewicht der einzelnen $\left\{\begin{matrix}\text{bejahenden}\\\text{verneinenden}\end{matrix}\right.$ Zeugniſſe, und je gröſser ihre Anzahl iſt; 2) daſs, wenn irgend eins dieſer Zeugniſſe von keinem Werthe, das heiſst, ſein Gewicht 0 iſt, daſſelbe dem Gewichte der übrigen weder etwas hinzuſetzt, noch etwas benimmt; 3) daſs, wenn unter den bejahenden Zeugniſſen, eins oder mehrere unverwerfliche vorhanden ſind, $A=0$ iſt, und das Gewicht der Zeugniſſe in der Wahrſcheinlichkeit der Exiſtenz der Begebenheit B ſein wird; 4) daſs, wenn unter den verneinenden Zeugniſſen eins oder mehrere unverwerflich ſind, $B=0$, und das Gewicht der Zeugniſſe in der Wahrſcheinlichkeit der Nichtexiſtenz der Begebenheit A iſt. 5) Endlich, daſs, wenn eins oder mehrere von den bejahenden, und ebenfalls eins oder mehrere von den verneinenden Zeugniſſen unverwerflich ſind; $A=B=0$ iſt; und die bezeugte Begebenheit auf ihre eigenthümliche Wahrſcheinlichkeit, das iſt, auf diejenige gebracht iſt, welche ihr unabhängig von Zeugniſſen beigelegt werden kann.

§. 18.

Wenn der Grad der Wahrſcheinlichkeit einer beſtimmten Begebenheit a priori gefunden, oder aus Erfahrungen, und unabhängig von Zeugniſſen hergeleitet worden iſt; ſo vergröſsert die Menge der Zeugniſſe,

welche diese Begebenheit bejahen, oder der Ueberschuss des Gewichts derjenigen Zeugnisse, welche sie bejahen, über das Gewicht derjenigen, welche dagegen sind, ihre eigenthümliche Wahrscheinlichkeit um einen Theil von dem, was ihr zur Einheit noch mangelt; und dieser Theil ist nicht blos dem Gewichte der Zeugnisse proportional, wie schon (§. 13.) erinnert worden ist, sondern auch dem Grade der eigenthümlichen Wahrscheinlichkeit dieser Begebenheit. Dieser Satz beruhet auf der Ungleichheit des Beifalls, den wir natürlicherweise einem und ebendemselben Zeugen geben, welcher allezeit der Wahrscheinlichkeit, die wir selbst der bezeugten That beigelegt haben, proportional ist. Man würde auch in der That weit mehr jemanden Glauben beimessen, wenn er sagte, dass er in 30 Würfen mit zwei Spielwürfeln nur ein einzigesmal einen Pasch von zwei Sechsen geworfen, als wenn ebenderselbe behauptete, dass er in 100 Würfen mit diesen beiden Würfeln bei jedem Wurfe einen solchen Pasch hervorgebracht hätte, und der Grad der Ueberzeugung, welcher dem Zeugnisse übrig bleibt, würde dem Grade der Wahrscheinlichkeit der bejahten Begebenheit proportional sein.

§. 19.

Aus diesem Satze folgt, dass der Grad der Wahrscheinlichkeit, welcher durch Zeugnisse der eigenthümlichen Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit hinzugefügt wird, in zusammengesetzter Verhältniss ist: 1) des Ueberschusses der Einheit über die eigenthümliche Wahrscheinlichkeit der bezeugten Begebenheit; 2) des Gewichts der Zeugnisse, welche die Begebenheit bejahen, oder des Ueberschusses des Gewichts derjenigen, welche sie bejahen, über das Gewicht derer, welche sie verneinen; 3) der eigenthümlichen Wahrscheinlichkeit der Begebenheit.

§. 20.

Lehrsatz 2. *Es bedeute $\frac{n}{m}$ die eigenthümliche Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit, und P den Ueberschuſs der Gewichte derjenigen Zeugniſſe, welche ſie bejahen, über das Gewicht derer, welche ſie verneinen. Ich behaupte, es wird die Wahrscheinlichkeit der Begebenheit durch dieſe Zeugniſſe* $= 1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right) \cdot \left(1 - \frac{n}{m} \cdot P\right)$.

Beweis. Vermöge des vorhergehenden Satzes vermehren die Zeugniſſe die eigenthümliche Wahrſcheinlichkeit der Begebenheit um den Grad $= \left(1 - \frac{n}{m}\right) . P . \frac{n}{m}$; folglich iſt die Wahrſcheinlichkeit dieſer Begebenheit, die Zeugniſſe zu Hülfe genommen, $\frac{n}{m} + \left(1 - \frac{n}{m}\right) . P . \frac{n}{m} = 1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right) + \left(1 - \frac{n}{m}\right) . P . \frac{n}{m} = 1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right) \times \left(1 - \frac{n}{m} P\right)$. *W. Z. E.*

§. 21.

Iſt das Gewicht der Zeugniſſe 0, das heiſst, iſt $P = 0$; ſo verwandelt ſich die eben gefundene Formel in $1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)$ oder $\frac{n}{m}$; oder welches einerlei iſt, ſo iſt die Begebenheit auf ihre eigenthümliche Wahrſcheinlichkeit gebracht. Wenn hingegen $P = 1$ iſt; ſo wird die Wahrſcheinlichkeit der Begebenheit $1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)^2$; hieraus folgt, daſs eine Anzahl von ſelbſt unverwerflichen Zeugniſſen nicht hinreichend iſt, eine Begebenheit

abſolut gewiſs zu machen, die es nicht ſchon durch ſich ſelbſt und unabhängig von Zeugniſſen iſt.

§. 22.

Iſt die That für ſich ſelbſt gewiſs, das heiſst, iſt ihre eigenthümliche Wahrſcheinlichkeit $\frac{n}{m} = 1$; ſo verwandelt ſich die obige Formel in 1, was auch P für einen Werth haben mag. Iſt hingegen $\frac{n}{m} = 0$; ſo verwandelt ſich dieſe Formel in Null, was auch der Werth von P ſein mag; hieraus folgt, daſs eine an ſich ſelbſt für unmöglich erkannte Begebenheit durch eine Menge von unverwerflichen Zeugniſſen keinen auch noch ſo geringen Grad von Wahrſcheinlichkeit erhalten kann.

§. 23.

Lehrsatz 3. *Es heiſse wiederum* $\frac{n}{m}$ *die eigenthümliche Wahrſcheinlichkeit einer Begebenheit, und* Q *ſei der Ueberſchuſs des Gewichts der Zeugniſſe, welche dieſe Begebenheit verneinen, über das Gewicht der Zeugniſſe, welche ſie bejahen; ſo wird die Wahrſcheinlichkeit der Begebenheit, nach Hinzunehmung dieſer Zeugniſſe,*

$$1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right) . \left(1 + \frac{n}{m} . Q\right).$$

Beweis. Zu Folge des Satzes (§. 19.) vergröſsern die Zeugniſſe die Wahrſcheinlichkeit $1 - \frac{n}{m}$ der Nichtexiſtenz der Begebenheit, um den Grad von Wahrſcheinlichkeit, welcher durch $\frac{n}{m} . Q . \left(1 - \frac{n}{m}\right)$ ausgedrükt wird; alſo bekömmt man die Wahrſcheinlichkeit der Nichtexiſtenz der Begebenheit, mit Hinzunehmung

der Zeugnisse, $= \left(1 - \frac{n}{m}\right) + \frac{n}{m} \cdot Q \cdot \left(1 - \frac{n}{m}\right) = \left(1 - \frac{n}{m}\right) \cdot \left(1 + \frac{n}{m} \cdot Q\right)$; und demnach wird die Wahrscheinlichkeit der Begebenheit $= 1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right) \times \left(1 + \frac{n}{m} \cdot Q\right)$. *W. Z. E.*

§. 24.

Wenn das Gewicht der Zeugnisse Null ist, das heisst, wenn $Q = 0$ ist; so verwandelt sich die nur gefundene Formel in $\frac{n}{m}$ und die Begebenheit kommt auf ihre eigenthümliche Wahrscheinlichkeit herab. Wenn $Q = 1$, so verwandelt sich diese Formel in $1 - \left(1 - \frac{n}{m}\right)\left(1 + \frac{n}{m}\right) = 1 - 1 + \frac{n^2}{m^2} = \frac{n^2}{m^2}$; hieraus folgt, dass irgend eine Anzahl von auch unverwerflichen Zeugnissen nicht gänzlich die eigenthümliche Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit vernichten kann, die nicht absolut unmöglich ist.

§. 25.

Ist $\frac{n}{m} = 0$; so wird die Formel auch 0. Ist $\frac{n}{m} = 1$; so verwandelt sie sich ebenfalls in 1, hieraus folgt, dass eine Zahl von Zeugnissen, welche ein Faktum verneinen, wenn sie auch unverwerflich wären, die Gewissheit nicht vermindern kann, welche dieses Faktum a priori oder auch durch die Erfahrung erhält.

§. 26.

Wenn allgemein $\frac{n}{m}$ die von Zeugnissen unabhängige Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit bedeutet;

ferner $1-A$ das Gewicht der Zeugniſſe darſtellet, welche dieſe Begebenheit bejahen; und $1-B$ das Gewicht der Zeugniſſe, welche ſie verneinen; ſo wird die Wahrſcheinlichkeit der Begebenheit, nach Hinzunehmung der Zeugniſſe, wie auch dieſelben beſchaffen ſein mögen, allezeit $\left[1-\frac{n}{m}\right].\left[1-\frac{n}{m}.(B-A)\right]$ ſein. Denn $B-A$ iſt der Ueberſchuſs des Gewichts der bejahenden Zeugniſſe über das Gewicht der verneinenden Zeugniſſe; und $A-B$ der Ueberſchuſs des Gewichts der verneinenden Zeugniſſe über das Gewicht der bejahenden Zeugniſſe. Setzt man alſo $B-A$ anſtatt P in der Formel $1-\left[1-\frac{n}{m}\right].\left[1-\frac{n}{m}.P\right]$ welche im zweiten Lehrſatze (§. 20.) gefunden worden iſt, ſo verwandelt ſich dieſe Formel in

$$1-\left[1-\frac{n}{m}\right].\left[1-\frac{n}{m}.(B-A)\right].$$

Eben ſo erhält man, wenn man in der Formel $1-\left[1-\frac{n}{m}\right].\left[1+\frac{n}{m}.Q\right]$ des dritten Lehrſatzes (§. 23.) $A-B$ anſtatt Q ſchreibt, wiederum

$$1-\left[1-\frac{n}{m}\right].\left[1+\frac{n}{m}.(A-B)\right] =$$

$$1-\left[1-\frac{n}{m}\right].\left[1-\frac{n}{m}.(B-A)\right].$$

§. 27.

Aus den Sätzen (§. 21. und 24.) folgt, daſs der Bruch $\frac{n}{m}.\left[1-\frac{n}{m}\right]$ zugleich die gröſst mögliche Vermehrung iſt, welche die Zeugniſſe, die ein Faktum behaupten, zu der eigenthümlichen Wahrſcheinlichkeit dieſes Faktums hinzuſetzen können; und auch die

gröſste Verminderung iſt, welche eben dieſe Wahrſcheinlichkeit durch die Zeugniſſe, die das Faktum leugnen, erhalten kann. Denn wenn x die gröſst mögliche Vermehrung dieſer Wahrſcheinlichkeit bedeutet, ſo hat man $\frac{n}{m} + x = 1 - \left[1 - \frac{n}{m}\right]^2 = 1 - 1 + 2 \cdot \frac{n}{m} - \frac{n^2}{m^2}$, woraus folgt $x = \frac{n}{m} - \frac{n^2}{m^2} = \frac{n}{m} \cdot \left[1 - \frac{n}{m}\right]$.

Eben ſo bekömmt man, wenn y die gröſst mögliche Verminderung eben dieſer Wahrſcheinlichkeit genannt wird, $\frac{n}{m} - y = \frac{n^2}{m^2}$; alſo $y = \frac{n}{m} - \frac{n^2}{m^2} = \frac{n}{m} \cdot \left[1 - \frac{n}{m}\right]$.

§. 28.

Die zwei eben angeführten Sätze zeigen, daſs alle möglichen Zeugniſſe für oder wider ein Faktum, nicht hinreichen, bei demſelben eine richtige Wahrſcheinlichkeit zu erhalten, wenn man ſonſt keinen Weg weder durch bloſse Schlüſſe, noch durch Erfahrungen hat, um dieſem Faktum einen eigenthümlichen Grad von Wahrſcheinlichkeit beizulegen; weil auch unverwerfliche Zeugniſſe nicht hinreichend ſind, weder ein ſehr wahrſcheinliches Factum gänzlich gewiſs zu machen, noch die abſolute Unmöglichkeit einer Sache von einer ſehr geringen Wahrſcheinlichkeit zu behaupten.

§. 29.

Könnte alſo einem Faktum kein eigenthümlicher Grad von Wahrſcheinlichkeit beigelegt werden, ſo würde man einen Irrthum begehen, wenn man für die Wahrſcheinlichkeit dieſes Faktums, entweder das Gewicht der Zeugniſſe, welche ſolches bejahen, oder den Ueberſchuſs des Gewichts derjenigen, welche bejahen, über das Gewicht derer, welche verneinen, annehmen

wollte. Ein einziges Beispiel wird genug sein, um sich davon zu überzeugen. Man nehme an, dass eine Begebenheit von dieser Art durch Zeugnisse behauptet worden, deren Gewicht $\frac{2}{3}$ ist, und durch Zeugnisse verneint worden, deren Gewicht $\frac{1}{3}$ ist; nähme man nun $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$ oder $\frac{1}{3}$ für die Wahrscheinlichkeit der Begebenheit an; so würde $1 - \frac{1}{3}$ oder $\frac{2}{3}$ die Wahrscheinlichkeit sein, dass die Begebenheit nicht vorhanden ist. Derowegen wären die Wahrscheinlichkeiten von bejahten sich widersprechenden Begebenheiten in verkehrter Verhältniss der Gewichte der Zeugnisse, welche sie bejahen: welches offenbar ungereimt ist. Diese Bemerkung zeigt deutlich das Unzureichende der Autoritäten, um Muthmassungen auf Begebenheiten zu gründen, deren Natur zu untersuchen weder die Vernunft, noch auch die Erfahrung irgend ein Mittel an die Hand geben, und deren Wahrscheinlichkeit unabhängig von diesen Autoritäten zu schätzen wir nicht im Stande sind.

§. 30.

Der den Zeugnissen bisher zugeschriebene Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit der bezeugten Begebenheiten setzet voraus, dass der Zeuge durch seine eigene Person der Sache, welche er bejahet, Bestätigung zu geben meint, und sie selbst für gewiss hält. Wenn selbige aber für den, der mir sie berichtet, nur wahrscheinlich ist, welches der Fall sein würde, wenn er sie selbst von einem andern Zeugen erhalten hätte; so ist alsdann die Wahrscheinlichkeit, welche die Sache durch das Zeugniss erhält, aus der Wahrscheinlichkeit des Zeugnisses, das mir sie berichtet, und der Wahrscheinlichkeit des vorgängigen Zeugnisses, welches zu diesem Gelegenheit gegeben hat, zusammengesetzt. Man setze also die eigenthümliche Wahrscheinlichkeit einer Begebenheit,

$\frac{n}{m}$; das Gewicht des Zeugnisses, das mir sie berichtet hat, $\frac{b}{a}$; das Gewicht des vorgängigen Zeugnisses, $\frac{d}{c}$: so wird die Wahrscheinlichkeit der Begebenheit vermöge dieser Zeugnisse, $\frac{n}{m} + \left[1 - \frac{n}{m}\right] . \frac{n}{m} . \frac{b}{a} . \frac{d}{c}$.

Und wenn des vorgängigen Zeugen sein Zeugniss auch nicht als unmittelbar die Sache bestätigend angesehen werden kann, indem selbiger es von einem dritten Zeugen erhalten hätte, dessen Gewicht $\frac{g}{f}$ ist; so wird die Wahrscheinlicheit der Begebenheit $\frac{n}{m} + \left[1 - \frac{n}{m}\right] . \frac{n}{m} \times \frac{b}{a} . \frac{d}{c} . \frac{g}{f}$; Und so weiter.

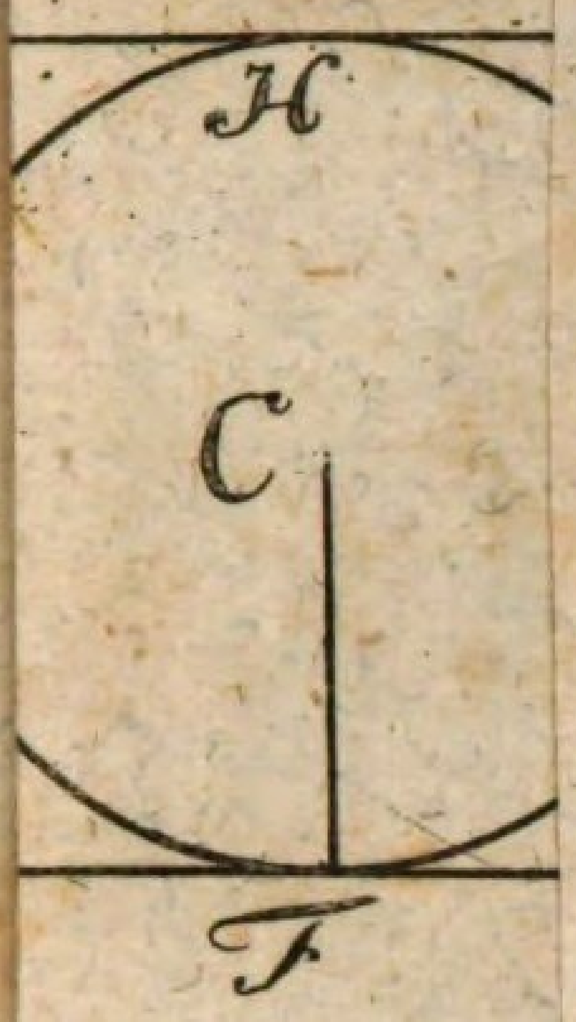
§. 31.

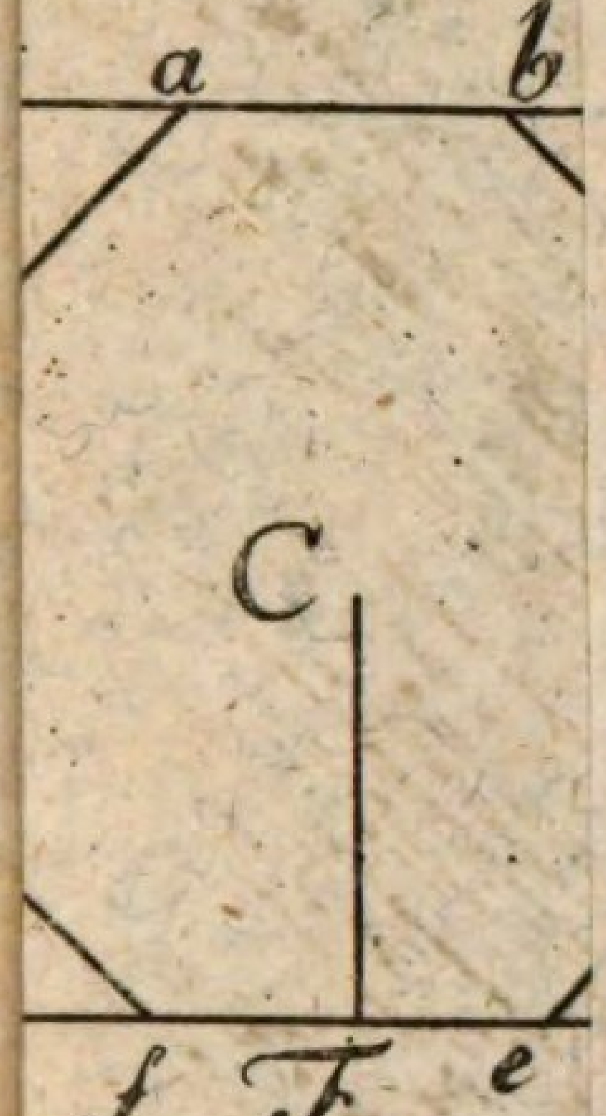
Ein Zeugniss, welches in Beziehung auf ein anderes Zeugniss, das ich selbst directe erhalten habe, abgelegt worden, setzet dem Gewichte dieses Zeugnisses, das ich erhalten habe, nichts hinzu. Wenn mir durch Peter ein gewisses Faktum bekräftigt worden ist, so setzet Paul, welcher das nämliche Zeugniss vom Peter erhalten hat, indem er mir selbiges berichtet, dem Einflusse des von dem Peter abgelegten Zeugnisses auf die Wahrscheinlichkeit, die ich von der Sache habe, nichts hinzu.

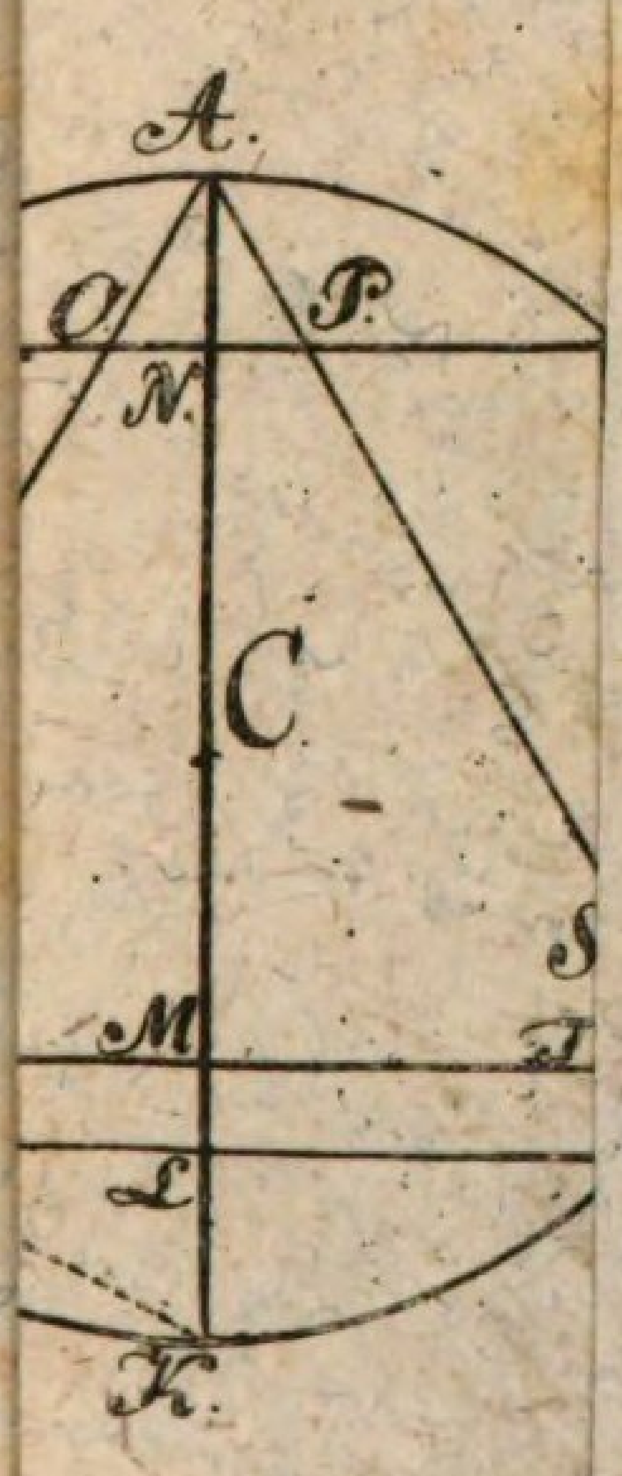
§. 32.

Ein authentisch in einer Schrift aufgezeichnetes Zeugniss behält die Wahrscheinlichkeit, welche es im Anfange hatte, als es mündlich von dem Zeugen abgelegt wurde; und zwar so lange, als die Aechtheit der Schrift gewiss bleibt. Wenn aber diese Aechtheit nur noch wahrscheinlich ist, so muss das Gewicht des Zeugnisses mit der Wahrscheinlichkeit der Authentizität der Schrift, worin es aufgezeichnet ist, multiplicirt werden.

E N D E.


H
C
F


a
b
C
f
F
e


A.
O
P.
N.
C
S
M
T
L
K.

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Bicquilley, Charles François <<de>>,

Die Rechnung des Wahrscheinlichen

Leipzig 1788

Math.p. 35 m
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081450-0
VD18 1534195X-001